ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

INGREDIENTES ESENCIALES

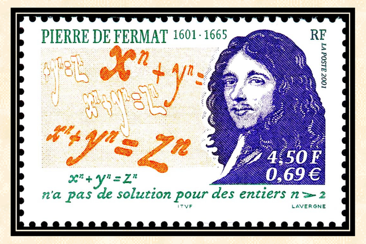
DESARGUES Y PASCAL

En el contexto de los trabajos de perspectiva del Renacimiento y ante la aparición de nuevos problemas en la ciencia aplicada, surgen en el siglo XVII varias figuras clave en la recuperación de los conocimientos geométricos griegos y en los nuevos enfoques que darían lugar más tarde al nacimiento de la Geometría Proyectiva. Además de KEPLER, que se orientó más hacia la óptica y la Astronomía, tres son los nombres que se destacan: GIRARD DESARGUES, BLAISE PASCAL Y PHILIPPE DE LA HIRE. Por la importancia de sus resultados nos centraremos en los dos primeros.

GIRARD DESARGUES (1591–1661) nació en Lyon, de familia acomodada, pues parece que era hijo de un notario. No se sabe nada de sus estudios hasta que aparece en París en 1626 en los círculos filosóficos y científicos próximos a RENÉ DESCARTES (1596–1650), con quien le unió una profunda amistad. En 1628 se encontraba sirviendo como ingeniero militar en el sitio de la Rochela, y a la vuelta de la guerra trabajó como arquitecto en París al servicio del Cardenal RICHELIEU. En esta época cultiva la amistad de PIERRE DE FERMAT (1601–1665), GILLES PERSONNE DE ROBERVAL (1602–1675), MARIN MERSENNE (1588-1648) y los PASCAL, padre e hijo.

DESARGUES fue fundamentalmente un ingeniero y un arquitecto, por lo que sus obras matemáticas están siempre dirigidas a su aplicación práctica. Muy pronto sus nuevos métodos geométricos causaron extrañeza y levantaron una oleada de críticas. Además, el estilo es conciso, oscuro y con un gran caudal de términos extraños, generalmente botánicos, para que fueran comprensibles a ingenieros y mecánicos. Los únicos que reconocieron la categoría de sus obras fueron los antes citados DESCARTES, FERMAT, MERSENNE y PASCAL, pero el resto de sus contemporáneos le tildaron de loco. DESARGUES era bastante aficionado a la polémica, pero harto de incomprensión se retiró a Lyon en 1650 donde vivió hasta su muerte

R. Descartes
emitido en el tercer centenario del *Discurso del Método*

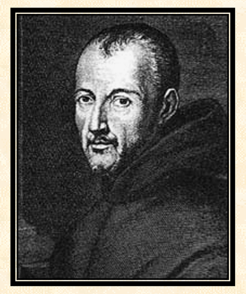


P. de Fermat
emitido en el cuarto centenario de su nacimiento

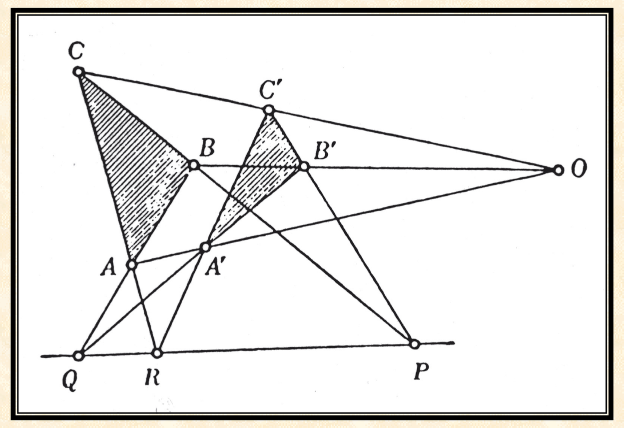
BLAISE PASCAL (1623-1662) fue un niño precoz entusiasmado con la geometría. A los 11 años su padre lo llevaba a las sesiones de la "Academia Mersenne", donde estableció contacto con DESARGUES. Éste le animó a usar su *método de proyección y sección* y a los 16 años publicó su famoso trabajo *Essay pour les coniques* donde aparece el teorema que lleva su nombre. Este teorema es uno de los más bellos y sugestivos de la matemática.

La figura de PASCAL es muy importante también en otras materias como la *hidrostática (ley de Pascal)*. Se le puede considerar el fundador del *cálculo de probabilidades* ("geometría del azar") y sus contribuciones son también fundamentales en el *cálculo combinatorio*. La última parte de su vida estuvo marcada por sus aportaciones filosóficas fruto de sus fuertes convicciones religiosas.

B. Pascal
emitido en el 350 aniversario de su nacimiento



M. Mersenne



Teorema de Desargues en el plano

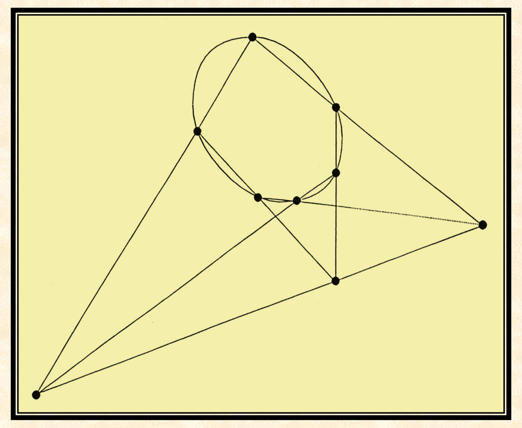
DESARGUES investiga:

- las secciones cónicas y los puntos del infinito,
- la invarianza de la *razón doble* y de las *cuaternas armónicas*,
- la teoría de las *polares*, y, por supuesto,
- el famoso ***Teorema de Desargues:***

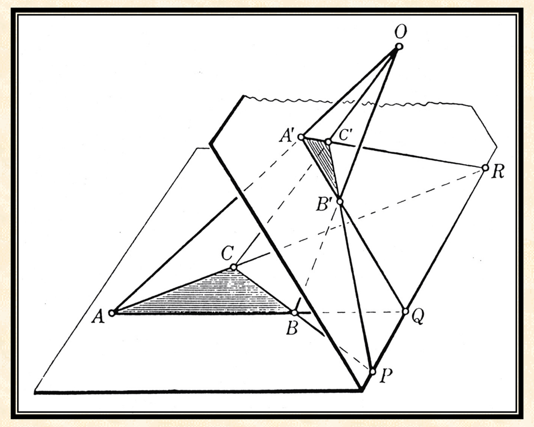
  Si proyectamos un triángulo del plano proyectivo de vértices A, B, C, desde un punto O, obtenemos otro triángulo de vértices A', B', C', y decimos que los dos triángulos son *perspectivos* desde O. Entonces, *dos triángulos son perspectivos si y sólo si los lados correspondientes se cortan en tres puntos alineados.*

Teorema de Pascal: *Si se inscribe un hexágono en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos están alineados.*

En general, un hexágono no está inscrito en una cónica, y el teorema de Pascal expresa la condición maravillosamente simple para que sí lo esté. Por eso se llama *hexagrama místico* la figura correspondiente.



Hexagrama místico de Pascal



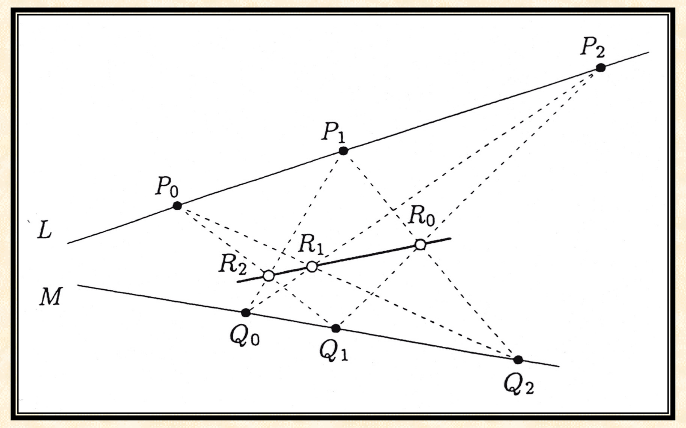
Teorema de Desargues en el espacio

El teorema de Desargues tiene una versión en el espacio cuya demostración es casi inmediata. En efecto, si los dos triángulos están en dos planos diferentes del espacio proyectivo, entonces los puntos P,Q,R de intersección de los lados correspondientes están en la intersección de los dos planos, *que es una recta*. El teorema de Desargues se puede considerar un caso límite de esto, cuando los dos planos se confunden en uno.

El siguiente teorema clásico puede considerarse como "el caso no regular" del de Pascal.

Teorema de Pappus

Sean L y M dos rectas distintas del plano proyectivo. Si P_0, P_1, P_2 están en L y Q_0, Q_1, Q_2 en M, y ninguno de ellos es el punto de intersección de las dos rectas, entonces los tres puntos de intersección (1) R_0 de P_1Q_2 con P_2Q_1, (2) R_1 de P_0Q_2 con P_2Q_0, y (3) R_2 de P_0Q_1 con P_1Q_0, están alineados.



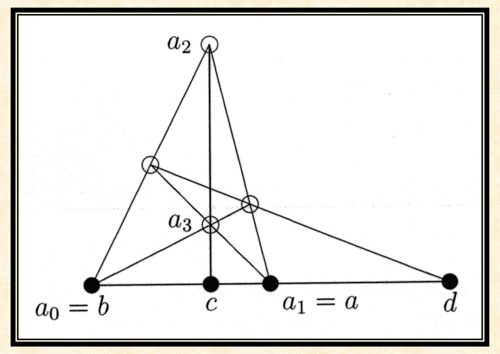
Desgraciadamente, el siglo XVII no era adecuado para la geometría pura. Los problemas científicos del momento requerían métodos algebraicos más efectivos para los cálculos que la tecnología necesitaba. Por eso, la Geometría Proyectiva fue abandonada a favor de la Geometría Analítica, el Álgebra y el Cálculo Infinitesimal. Los resultados de DESARGUES, PASCAL y DE LA HIRE se olvidaron hasta principios del siglo XIX cuando se produjo el resurgimiento de la geometría pura.

RAZÓN DOBLE

La pregunta de ALBERTI: *¿qué se conserva por proyección, si no lo hacen ni la longitud ni los ángulos?*, da lugar a estudiar cuándo varios puntos dados en una recta se pueden transformar (mediante proyecciones sucesivas) en otros tantos puntos dados de la otra. Si se tienen tres puntos es siempre posible. El invariante numérico que interviene para cuatro puntos A, B, C y D es su *razón doble:* (CA/CB) : (DA/DB), pues *cuatro puntos alineados se pueden transformar en otros cuatro alineados si y sólo si la razón doble de los primeros es la misma que la de los segundos.*

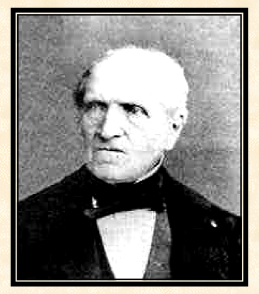
Ya PAPPUS conocía esta razón y probó su invariancia, pero no en términos de proyección y sección. Curiosamente, un resultado análogo para *geometría esférica* había sido probado por MENELAO en su *Spherica*.

DESARGUES se ocupa de la razón doble y su invariancia en una de sus obras. Cuando la razón doble es –1 se dice que tenemos una *cuaterna armónica* y DESARGUES obtuvo un método para la *construcción del cuarto armónico*, es decir, dados tres puntos alineados, *a*, *b* y *c*, se quiere construir un cuarto punto, *d*, alineado con ellos, tal que la razón doble de *a*, *b*, *c* y *d* sea –1; a este cuarto punto *d* se le llama *cuarto armónico de c respecto de a y b.*



En el siglo XIX KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT (1798–1867) y MICHEL CHASLES (1793-1880) desarrollaron la teoría proyectiva de la razón doble, no sólo para puntos sino también para rectas y planos de un haz.

K. G. Ch. von Staudt



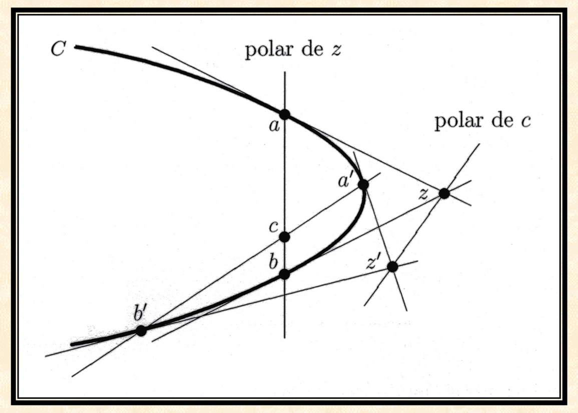
M. Chasles

POLARIDAD

Tiene su origen en APOLONIO. En el siglo XVII aparece de nuevo con DESARGUES. Los métodos de proyección y sección de éste le permiten, a diferencia de APOLONIO, trabajar primero sobre una circunferencia y luego obtener los mismos resultados para cualquier sección cónica. En el siglo XIX cobró de nuevo importancia en relación con el concepto de *dualidad*.

La relación de *polaridad sobre una cónica* asocia a cada punto del plano una recta y viceversa del modo siguiente: Dado un punto *z* exterior a una cónica fijada C, podemos trazar por él dos tangentes a la cónica. La recta que une los dos puntos de intersección de cada tangente con la cónica se llama *polar del punto z respecto a la cónica* C. El punto *z es el polo de la recta polar* construída. Si el punto está en la cónica, *su polar es la tangente a la cónica* por ese punto.

Por tanto, se establece una relación: *recta–punto* y *punto–recta*, con una propiedad importante: *las polares de los puntos c que están en la polar de z pasan por z.*



Polaridad respecto de una cónica

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
2002

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM