ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

DANDO PASOS HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

EL ESPACIO AFÍN Y EL ESPACIO PROYECTIVO

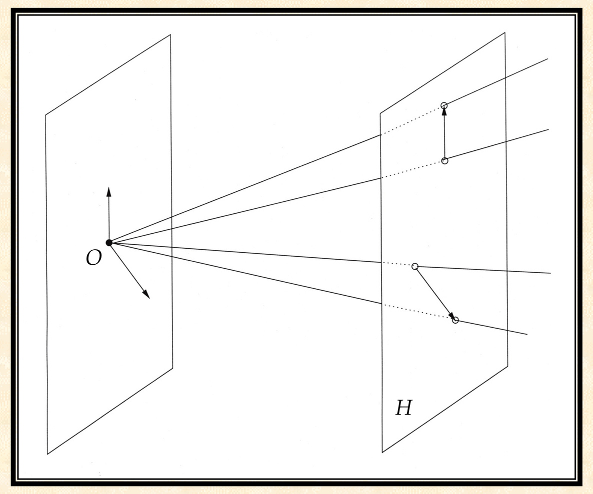
Para seguir avanzando en este recorrido histórico, se hace necesario un inciso para definir algunos conceptos que cronológicamente fueron posteriores.

Los geómetras del Renacimiento y los siglos siguientes trabajaban en el espacio tridimensional, pero pronto se dieron cuenta de que necesitaban otros objetos además de los puntos, rectas, planos y demás figuras: vieron que el fenómeno del *paralelismo* podía tratarse de modo unificado con la incidencia de variedades si tenemos en cuenta que dos variedades paralelas no comparten puntos pero sí *direcciones*. La consideración de las direcciones o clases de equivalencia de paralelismo como "puntos" que había que añadir al espacio tridimensional llevó con el tiempo a la noción de espacio proyectivo:

Los puntos de un *espacio proyectivo P, de dimensión n* son las rectas vectoriales de un espacio vectorial V (asociado a P) de dimensión $n+1$.

Así pues, una *recta proyectiva* representa las direcciones de un plano vectorial y un *plano proyectivo* representa las direcciones de un espacio vectorial de dimensión tres.

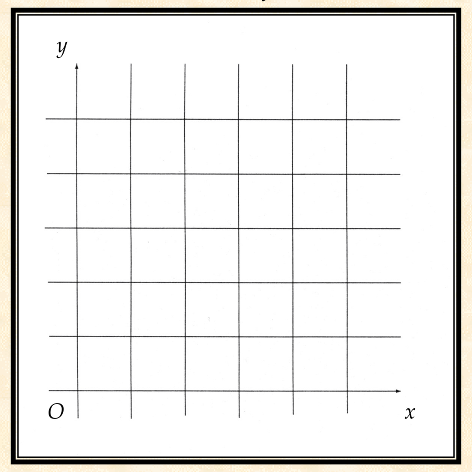
Ahora bien, si fijamos un *hiperplano H de V* (considerado ahora como espacio afín) *que no pase por el origen O*, entonces *las rectas de V que pasan por O y no son paralelas a H se corresponden biyectivamente con los puntos de H.*



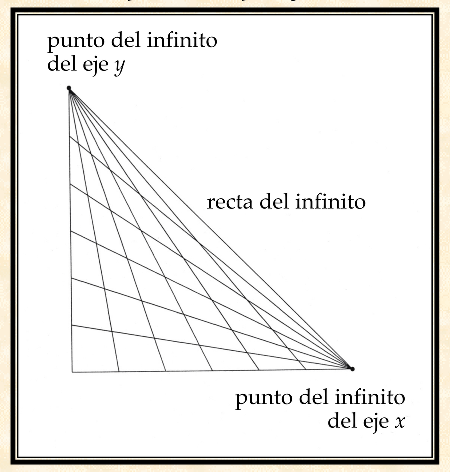
Las demás rectas que pasan por O son paralelas a H y representan las distintas direcciones de paralelismo de H. Se llaman los *puntos del infinito de H* (idea visual de que dos rectas paralelas comparten su dirección, algo que no se ve pero que da la impresión de que ocurre "en el infinito", "donde no nos alcanza la vista")

Podemos observar que los puntos del infinito de H constituyen a su vez un espacio proyectivo de dimensión n-1, según la definición anterior, con lo cual tenemos que *P se descompone en unión disjunta del espacio afín H, de dimensión n, y un espacio proyectivo, P', de dimensión n-1, al que se llama* hiperplano del infinito. Por ejemplo, una recta proyectiva es una recta afín más un punto del infinito, y un plano proyectivo es un plano afín más una recta proyectiva de puntos del infinito.

Plano afín



Completado proyectivo



La definición dada de espacio proyectivo entronca directamente con los estudios de perspectiva, sección y proyección ya considerados en paneles anteriores: si el origen de coordenadas O es el foco del cual parten los rayos o rectas vectoriales, entonces identificamos dos *figuras perspectivas*, es decir, que sean proyección desde O una de la otra, ya que los puntos de cada rayo quedan identificados entre sí al trasladar la situación a la geometría del espacio proyectivo.

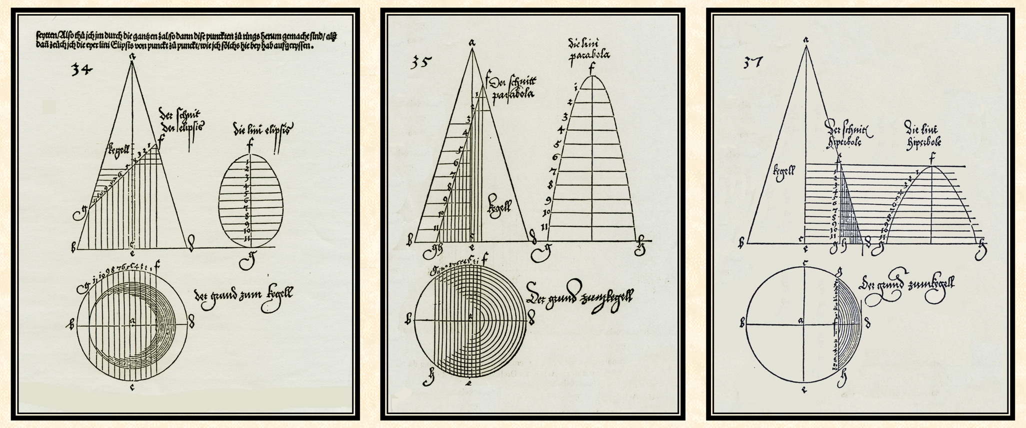
Se responde así a las preguntas de LEÓN BATTISTA ALBERTI en 1435: *¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura?* y *¿cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera?* En efecto, de acuerdo con las explicacines anteriores, resulta que:

– Dos secciones de la misma figura son *proyectivamente iguales*, y

– Las propiedades comunes a las dos secciones son las que provienen de la Geometría Proyectiva, no de la Geometría Afín.

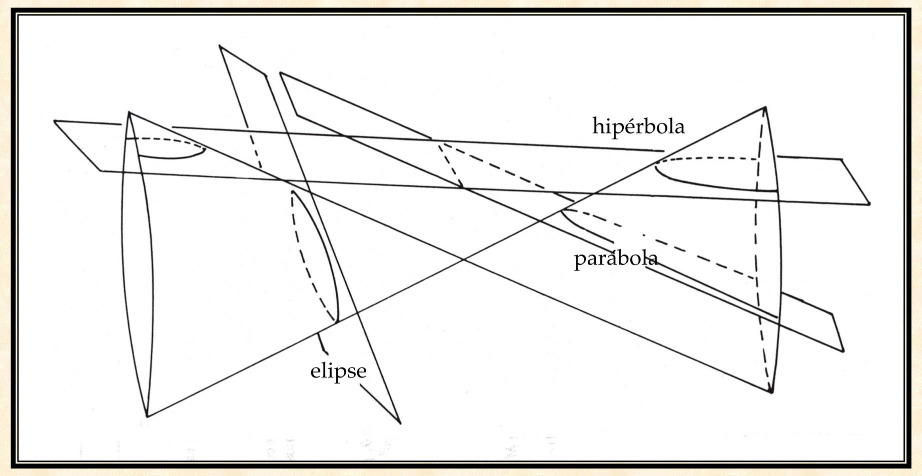
LAS SECCIONES CÓNICAS

El estudio de las secciones cónicas se inició en la Grecia Clásica con MENECMO en el siglo IV a.d.C. y sobre todo con APOLONIO a finales del siglo III a.d.C.. Los trabajos de este último cobraron interés de nuevo en el siglo XVII para resolver problemas relacionados con la Astronomía y la Óptica.

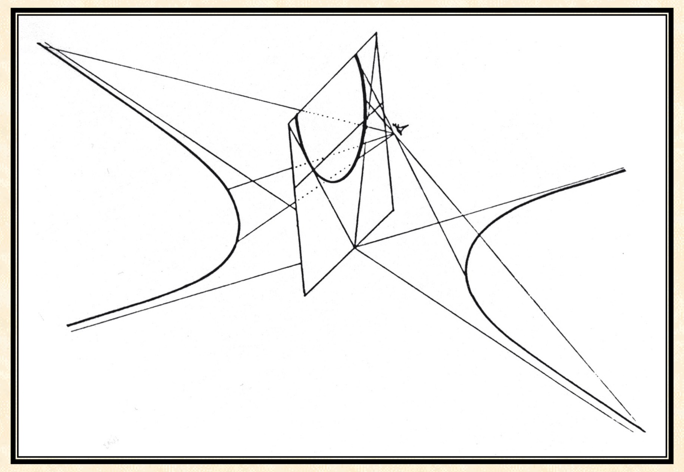


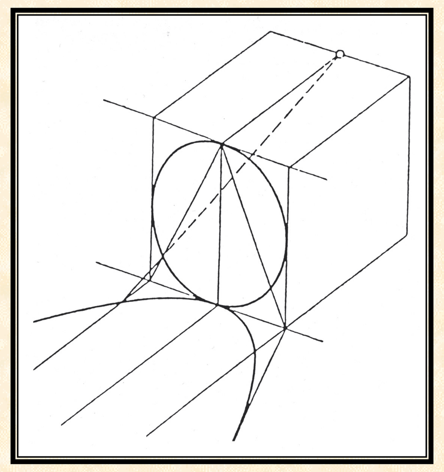
Ilustraciones de A. DURERO
Nuremberg 1525

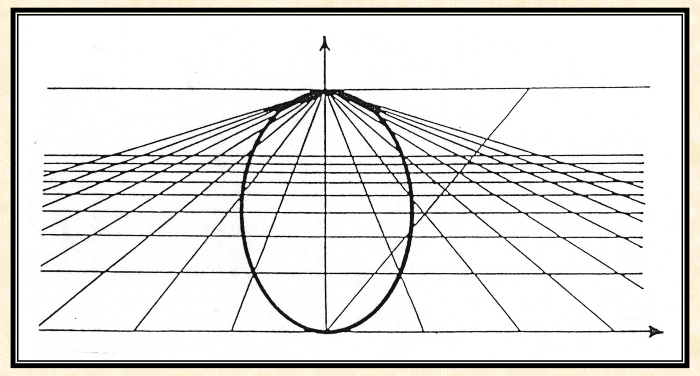
Dado que las *cónicas afines* pueden construirse como secciones de un cono, *todas parecen iguales si se miran desde el vértice del cono.*



Teniendo en cuenta el concepto de espacio proyectivo, en el que todos los puntos de una recta vectorial quedan identificados, se llega a que la Geometría Proyectiva da un tratamiento unificado a las cónicas: *hay una única cónica regular proyectiva.* Entonces, dada una cónica regular en el plano proyectivo, y elegida una recta como recta del infinito, distinguiremos si la cónica afín resultante (al quitar la recta del infinito) es *una hipérbola, una parábola o una elipse,* según la recta de infinito corte a la cónica en *dos puntos, un punto, o ninguno.*

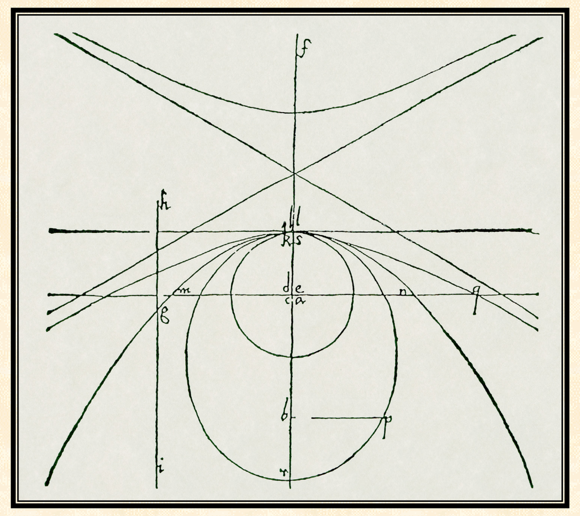






LOS PUNTOS DE INFINITO

En el contexto de sus investigaciones sobre Óptica, JOHANNES KEPLER (1571-1630) introdujo en 1604 la noción de *punto de infinito* para dotar a la parábola de un segundo foco. KEPLER estudia el comportamiento de una elipse tanto en el caso en el que los dos focos se junten dando lugar a una circunferencia, como en el caso en el que un foco quede fijo y el otro se aleje dando lugar a una parábola. ¿Dónde está entonces el segundo foco de la parábola? KEPLER decía que *en una parábola un foco estaba dentro y el otro a una distancia infinita del primero.* No ocurre así en elipses ni hipérbolas, cuyos focos están a distancia finita.



Sistema de cónicas de KEPLER
Ad Vitellionem paralipomena
Frankfurt 1604

Mientras que en la elipse y en la hipérbola los rayos de luz que parten de un foco se reflejan en *rayos que pasan por el otro foco,* en la parábola los rayos que parten del foco se reflejan en *rayos paralelos al eje,* y por tanto el foco segundo de la parábola está en ambas direcciones a lo largo del eje (tiene que estar en ambas para dar continuidad a las transformaciones de la elipse y la hipérbola en una parábola). Y ésta es justamente la idea de la noción moderna de los puntos de infinito.

Johannes Kepler

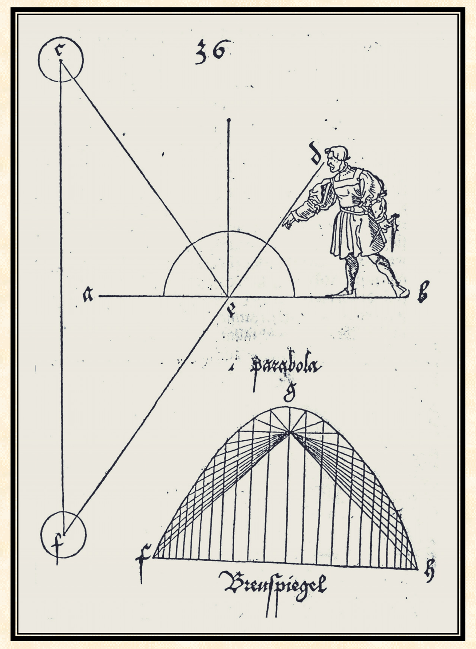


Ilustración de A. DURERO
Nuremberg 1525

El estudio de KEPLER sobre los focos de las secciones cónicas se enmarca en el problema de dar una teoría unificada para las investigaciones sobre *reflexión y refracción de los rayos de luz en espejos cóncavos y convexos de tipo cónico.* EUCLIDES ya da razón de los llamados *espejos ardientes,* que eran espejos cóncavos tales que al concentrar los rayos de sol en el foco hacen que los objetos situados en éste entren en combustión.

KEPLER es muy conocido además por su demostración de que las órbitas de los planetas son elípticas.

Como anécdota se puede mencionar que el "ocho tumbado" que se utiliza para representar infinito se debe a JOHN WALLIS, matemático inglés del siglo XVII.

En los tratados de ALBERTI y sobre todo de DESARGUES, aparecen también el concepto y la construcción de los puntos del infinito, con motivaciones de índole pictórica en el caso de ALBERTI y geométricas en el caso de DESARGUES. Tanto KEPLER como DESARGUES consideran los dos "terminales de una recta" como encontrándose en el infinito y así las rectas proyectivas tienen la misma estructura que la circunferencia.

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
2002

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM