



ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

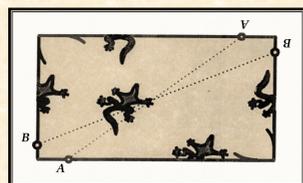
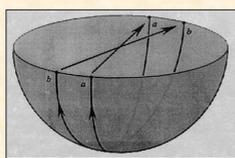
MODELOS TOPOLÓGICOS DEL PLANO PROYECTIVO REAL

El plano proyectivo real P es una superficie topológica compacta y cerrada (sin borde). Una manera de construirlo es pegar un disco con una banda de Möbius a lo largo de sus bordes; esto muestra que se trata de una superficie no orientable. Como consecuencia, el plano proyectivo no se puede sumergir en el espacio afín ordinario sin que aparezcan autointersecciones y puntos singulares. Es muy importante investigar estas inmersiones, denominadas modelos del plano proyectivo real.

JACOB STEINER encontró en 1853 una manera de hacer inmersiones de ese tipo, y los modelos que obtuvo se denominan hoy superficies de Steiner. Las más conocidas son la Superficie Romana y la Crosscap. Medio siglo más tarde, en 1901, WERNER BOY descubrió una tercera, que se ha llamado después Superficie de Boy.

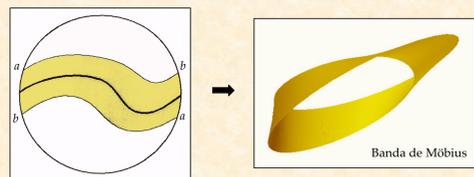
LA BANDA DE MÖBIUS EN EL PLANO PROYECTIVO

La representación más directa del plano proyectivo real P es como el conjunto de las rectas del espacio afín R^3 que pasan por el origen. Como cada una de esas rectas corta a la esfera unidad en exactamente dos puntos antipodales, se puede obtener P identificando en la esfera cada dos puntos antipodales. Si se toma sólo una semiesfera, basta identificar los puntos antipodales de su borde. Pero una semiesfera es lo mismo que un disco, así que el plano proyectivo se obtiene a partir de un disco identificando cada dos puntos antipodales de su borde.



Lagarto plano moviéndose en el plano proyectivo

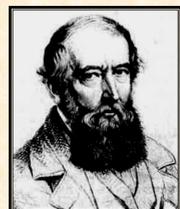
La banda de Möbius se obtiene pegando en sentidos opuestos los extremos de una banda plana. Si se considera tal banda en un disco, al identificar cada dos puntos antipodales del borde, se obtiene: de la banda, una banda de Möbius, y del disco, el plano proyectivo. En resumen, se tiene una banda de Möbius dentro del plano proyectivo.



Ahora se observa que el complementario de la banda consiste en dos discos de los que se han identificado partes de sus bordes respectivos. Esta identificación da lugar a un solo disco, y concluimos que, efectivamente, el plano proyectivo es la unión de una banda de Möbius y un disco.



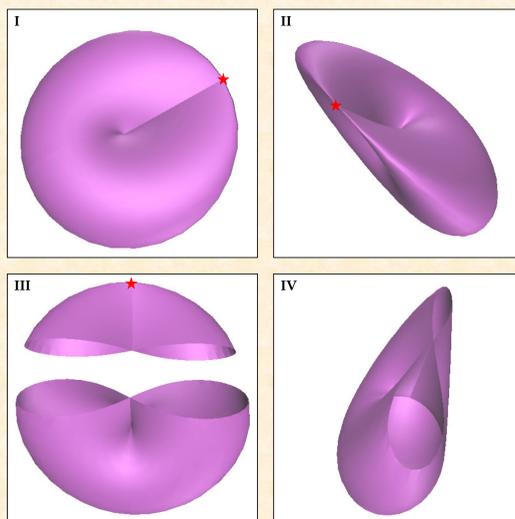
D. Hilbert



J. Steiner

CROSSCAP

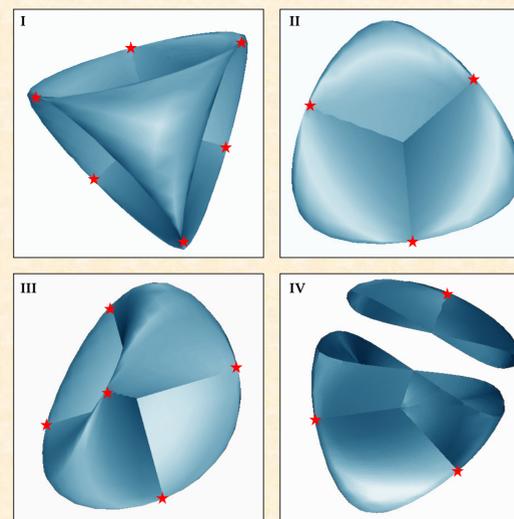
Esta superficie tiene una línea de autointersección, que termina en dos puntos singulares.



- I. En esta vista se distingue la línea de autointersección junto con sus dos singularidades.
- II. Esta imagen rotada muestra mejor cómo tiene lugar la autointersección.
- III. En este primer corte se ve fácilmente que la parte superior es un paraguas de Whitney (sin el mango) con su punto singular.
- IV. Al girar la superficie se aprecia mejor el otro punto singular.

SUPERFICIE ROMANA

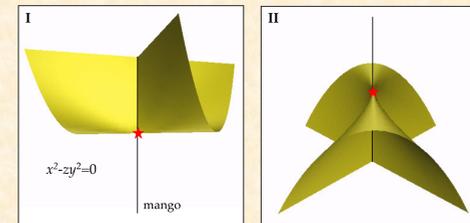
Es una superficie con tres líneas de autointersección, cada una de las cuales termina en dos puntos singulares. Las tres líneas de autointersección se intersectan a su vez en un punto singular triple.



- I. En esta imagen las tres líneas de autointersección se ven sólo parcialmente, pero los seis puntos singulares están todas a la vista.
- II. Después de una rotación de la figura, aparece la mitad de cada una de las tres líneas de autointersección, y el punto singular en el que se intersectan.
- III. Rotando de nuevo, se aprecia mejor el punto triple.
- IV. Aquí se ha cortado la superficie para ver mejor la naturaleza de los puntos de autointersección.

SINGULARIDADES DE WHITNEY

Entre los puntos singulares de las superficies de Steiner, aparecen los denominados de Whitney, en honor de HASSLER WHITNEY (1907-1989). Se llama paraguas de Whitney la superficie algebraica de ecuación implícita $x^2 - zy^2 = 0$, que aparece en la figura I. La figura II da otra perspectiva de este paraguas.



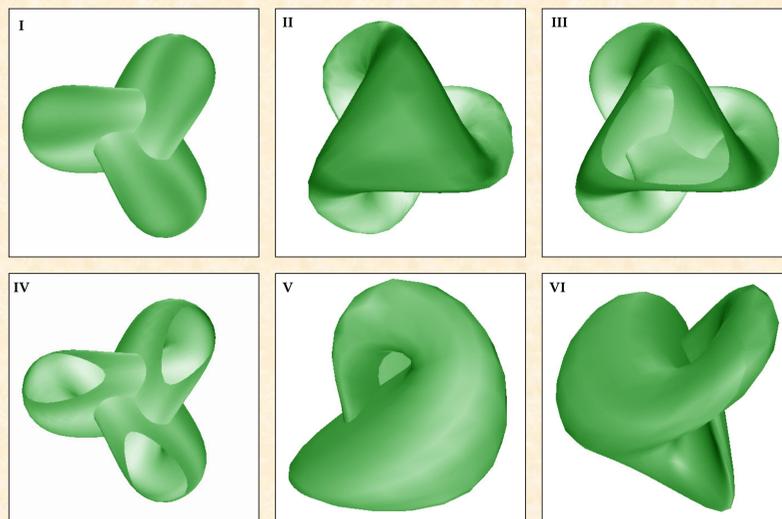
El eje coordenado $z=0$ aparece contenido en la superficie, una mitad como línea de autointersección, la otra como mango de paraguas. El origen de coordenadas es el punto singular de Whitney, que está señalado con una estrella roja. La misma señal se utiliza en las imágenes de las superficies de Steiner.



H. Whitney

LA SUPERFICIE DE BOY

El estudio de los modelos de STEINER hizo pensar a DAVID HILBERT (1862-1943) que al sumergir el plano proyectivo en el espacio afín siempre debían aparecer puntos singulares además de líneas de autointersección. Propuso entonces a un estudiante suyo, WERNER BOY, que demostrara eso. Para su sorpresa, BOY mostró lo contrario, exhibiendo en 1901 un modelo del plano proyectivo real que sólo tenía líneas de autointersección. Esta superficie se ha llamado después Superficie de Boy. La superficie de Boy tiene una sola curva de autointersección que se corta a sí misma en un punto triple.



- I. Esta vista muestra parte de la curva de autointersección, junto con el punto en que se corta a sí misma.
- II. Esta imagen rotada oculta todas las autointersecciones.
- III. Aquí se ha abierto una ventana en la imagen anterior para ver las autointersecciones.
- IV. En este caso se han abierto tres ventanas para apreciar mejor la estructura de la superficie.
- V. Aquí se muestra parte de la curva de autointersección.
- VI. Otra vista diferente de la curva de autointersección.

En estas imágenes generadas con MAPLE, se puede observar como ensanchando la parametrización de una banda de Möbius se obtiene la Superficie de Boy



EL PLANETA DE BOY

(según JEAN-PIERRE PETIT)

Anselme Lanturlu visita un planeta en la Superficie de Boy, que tiene el Polo Norte y el Polo Sur en el mismo punto, cada uno en una cara de la superficie. Un camino ancho que recorriera el planeta desde el Polo Norte al Polo Sur a lo largo de un meridiano sería una banda de Möbius y lo mismo pasaría en el Ecuador. Sin embargo ningún otro camino siguiendo un paralelo alrededor del polo sería una banda de Möbius.

