ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

PLANOS PROYECTIVOS FINITOS

DESCRIPCIÓN AXIOMÁTICA DEL PLANO PROYECTIVO

Se puede definir el plano proyectivo mediante cuatro axiomas de incidencia entre puntos y rectas:

- Dos puntos determinan una única recta.
- En cada recta hay al menos tres puntos.
- Hay tres puntos no alineados.
- Dos rectas cualesquiera se cortan en un punto.

Si estos axiomas se cumplen para un conjunto *de puntos* en el que se señalan ciertos subconjuntos como *las rectas* y se define la relación de incidencia *punto pertenece a recta*, entonces tenemos un *plano proyectivo*.

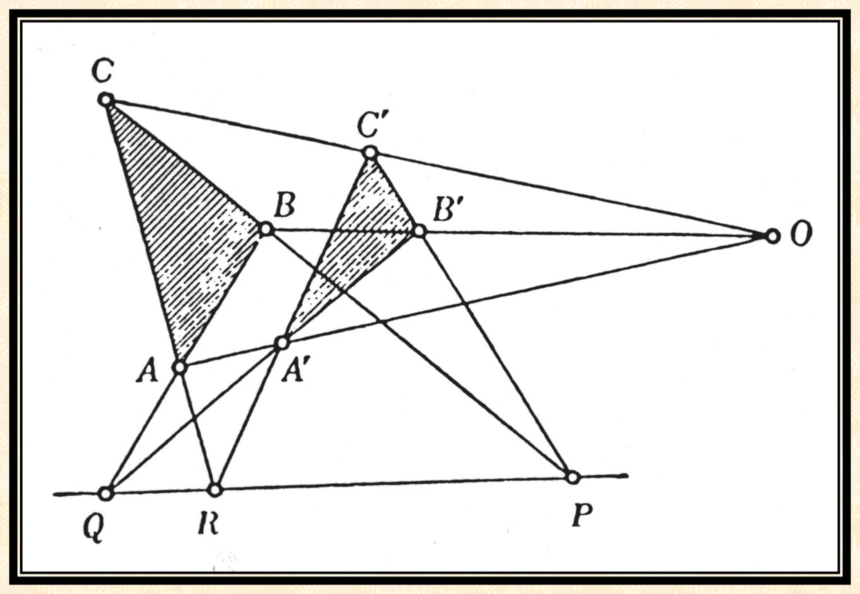
Surge ahora una pregunta natural: *¿Qué relación hay entre esta definición axiomática de plano proyectivo y la construcción del plano proyectivo como conjunto de rectas de un espacio vectorial de dimensión 3?*

Para facilitar las explicaciones, convenimos en denominar *plano proyectivo axiomático* a cualquier conjunto de puntos y rectas que cumpla la axiomática anterior, y *plano proyectivo algebraico* al conjunto de rectas de un espacio vectorial de dimensión 3.

En primer lugar se observa que un plano proyectivo algebraico (definido sobre un cuerpo K finito o infinito, con 2 o más elementos), cumple los axiomas anteriores, y es por tanto un plano proyectivo axiomático. Pero, ¿y recíprocamente?

La respuesta a esta cuestión es que *NO: se pueden encontrar planos proyectivos axiomáticos que no son algebraicos.*

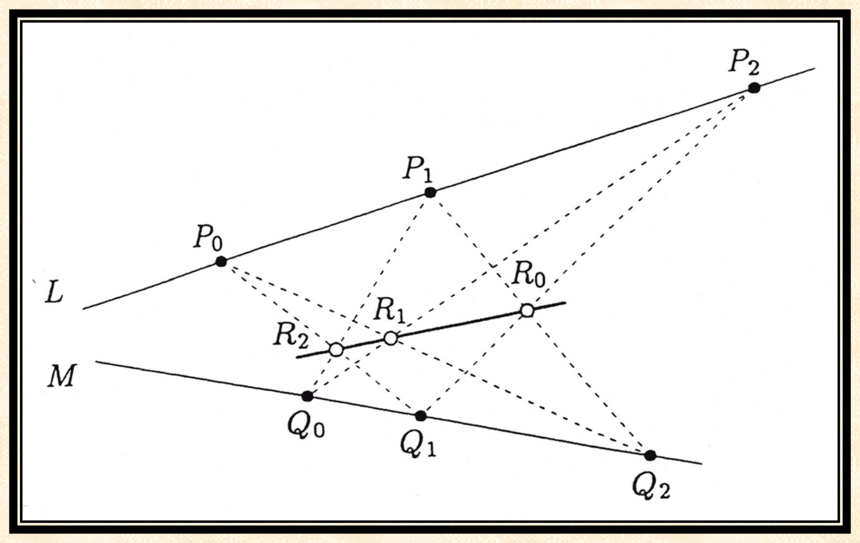
La existencia de esos ejemplos no algebraicos está relacionada con uno de los resultados clásicos de la Geometría Proyectiva: el célebre **Teorema de Desargues**, que se verifica en todos los planos proyectivos algebraicos**.** Ocurre que *no todos los planos proyectivos axiomáticos cumplen ese teorema,* y naturalmente, los que no lo cumplen no pueden ser algebraicos. El primer ejemplo de este fenómeno se debe a OSWALD VEBLEN (1880-1960) y JOSEPH HENRY MACLAGAN WEDDERBURN (1882-1948). Para distinguirlos, los planos proyectivos que sí cumplen el teorema de Desargues se denominan *desarguesianos.*



Teorema de Desargues

Estos planos proyectivos desarguesianos sí se pueden definir algebraicamente, aunque con un pequeño matiz. En realidad, se demuestra que *un plano proyectivo desarguesiano está definido de manera algebraica* (como rectas de un espacio vectorial), pero no necesariamente sobre un cuerpo, sino *sobre un anillo de división*.

Digamos, para completar esta discusión, que *un plano desarguesiano está definido sobre un cuerpo* precisamente cuando se verifica en él otro resultado clásico: el **Teorema de Pappus.**

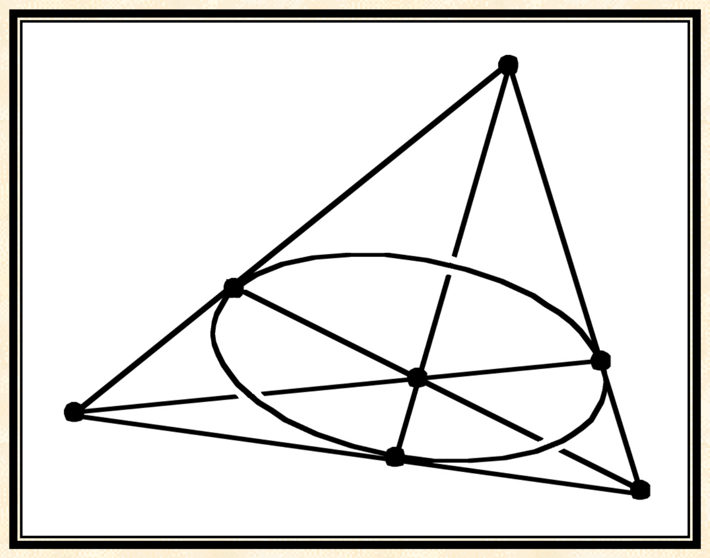


Teorema de Pappus

PLANOS PROYECTIVOS FINITOS

Los axiomas que definen un plano proyectivo pueden aplicarse a conjuntos finitos de puntos y rectas, situación que se aleja de la intuición geométrica más inmediata. Se tienen en este caso los *planos proyectivos finitos*.

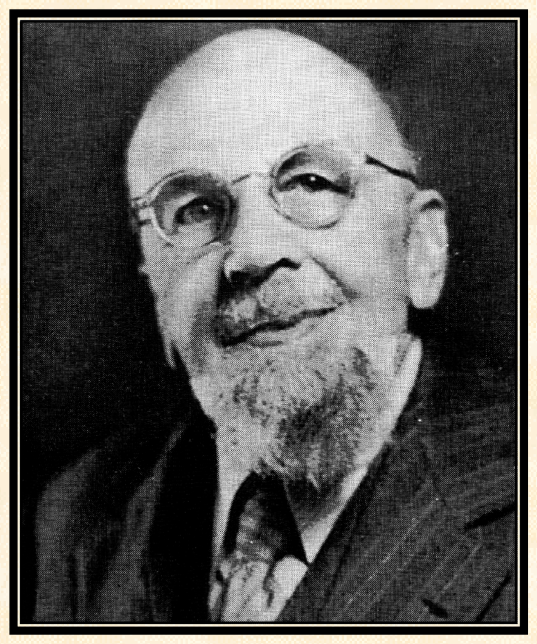
Es claro que si un plano proyectivo finito está definido sobre un cuerpo, éste debe ser finito. Se demuestra entonces que si el cuerpo tiene p elementos, el plano proyectivo tiene $1+p+p^2$ puntos, y el mismo número $1+p+p^2$ de rectas. De este modo, el plano proyectivo finito *más pequeño* está definido sobre el cuerpo de dos elementos, y resulta tener *7 puntos y 7 rectas*. Este plano de siete puntos se representa mediante la configuración adjunta, que muestra las incidencias de puntos y rectas. Otro ejemplo importante de plano proyectivo finito es el plano proyectivo no desarguesiano de Veblen y Wedderburn: se trata de *un plano proyectivo finito con 91 puntos.* Este plano no es algebraico, pero existe otro plano proyectivo con 91 puntos que sí lo es: el definido sobre un cuerpo finito con p=9 elementos (pues en ese caso $1+p+p^2$=91).



Configuración de Fano

La Geometría Proyectiva *finita* fue considerada ya por VON STAUDT, y formalizada con todo rigor por matemáticos posteriores. Mención especial entre éstos merece GINO FANO (1871-1952), que da su nombre a la configuración del plano proyectivo con siete puntos.

K.G.Ch. von Staudt



G. Fano

J.H.M. Wedderburn

O. Veblen

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
2002

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM