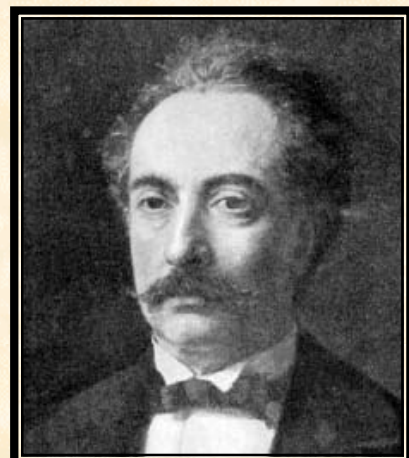


ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

EL MODELO PROYECTIVO DEL PLANO HIPERBÓLICO

En 1871 FELIX KLEIN presentó un *modelo proyectivo de geometría no euclídea*, siguiendo unas ideas anteriores de EUGENIO BELTRAMI (1835-1900). Este modelo es útil para adquirir una visión global del plano hiperbólico y entender algunas de sus peculiaridades.



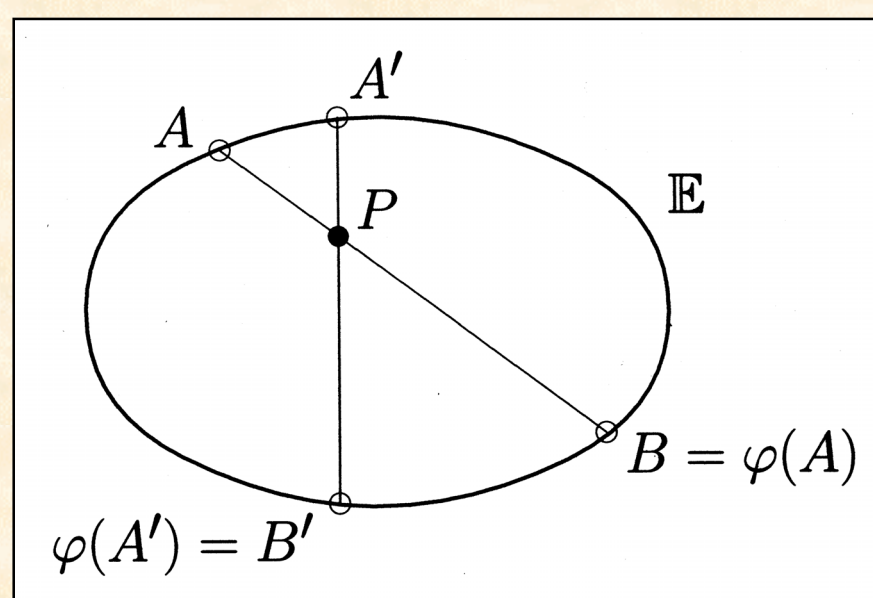
E. Beltrami



F. Klein

MOVIMIENTOS

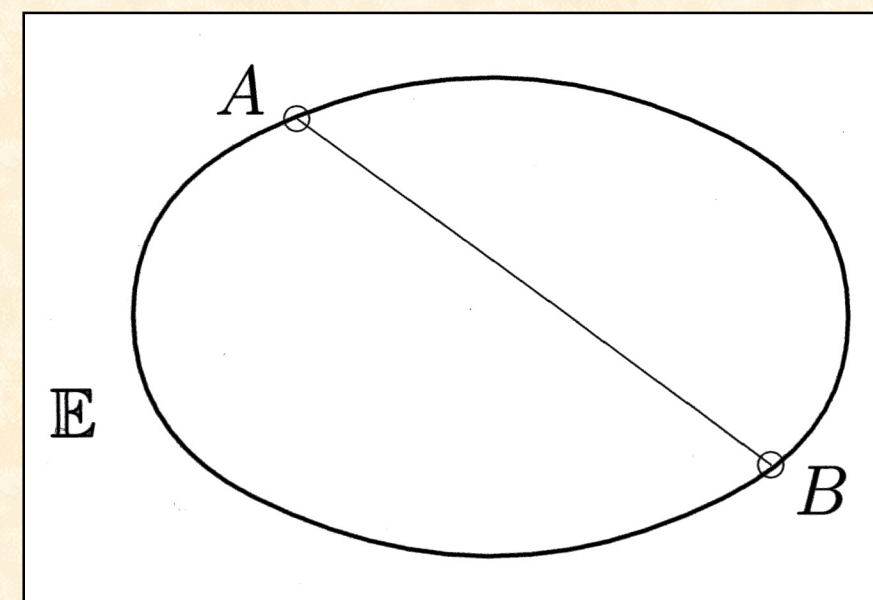
Los *movimientos* de este plano hiperbólico son los del plano proyectivo (las *colineaciones*) que dejan invariante el absoluto E . Por supuesto, lo que importa aquí es la restricción de dichas colineaciones al plano hiperbólico. Dos figuras del plano hiperbólico se consideran iguales (o *congruentes*) cuando hay un movimiento que transforma una en otra.



Ejemplo de movimiento: una homología φ de centro P que induce una involución en el absoluto. Este movimiento se llama *simetría de centro P* .

PUNTOS Y RECTAS

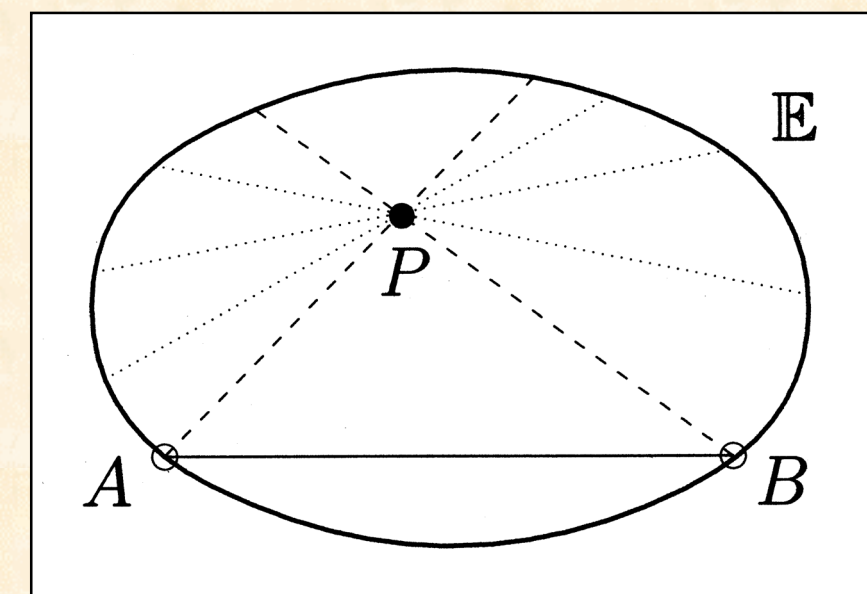
A partir de una cónica E del plano proyectivo real se considera *el plano hiperbólico* como *formado por los puntos interiores de E* . Las rectas de este modelo de plano hiperbólico son las mismas que las del plano proyectivo, pero reducidas a su parte interior a E . La cónica E se denomina *cónica absoluta* o *absoluto* del plano hiperbólico. El siguiente dibujo resume esto.



A y B no son puntos de la recta del plano hiperbólico, que es por tanto *ilimitada*.

PARALELISMO

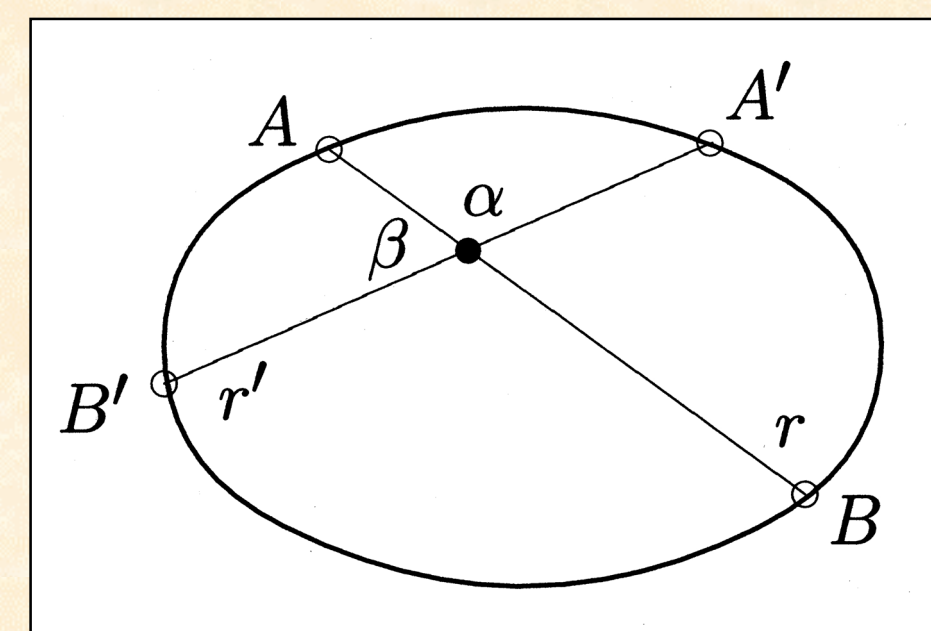
Observamos que en el plano hiperbólico no se cumple el *Quinto Postulado de Euclides*: por un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas rectas que no la cortan.



Las rectas PA y PB se llaman *paralelas* a AB y las otras *ultraparalelas*.

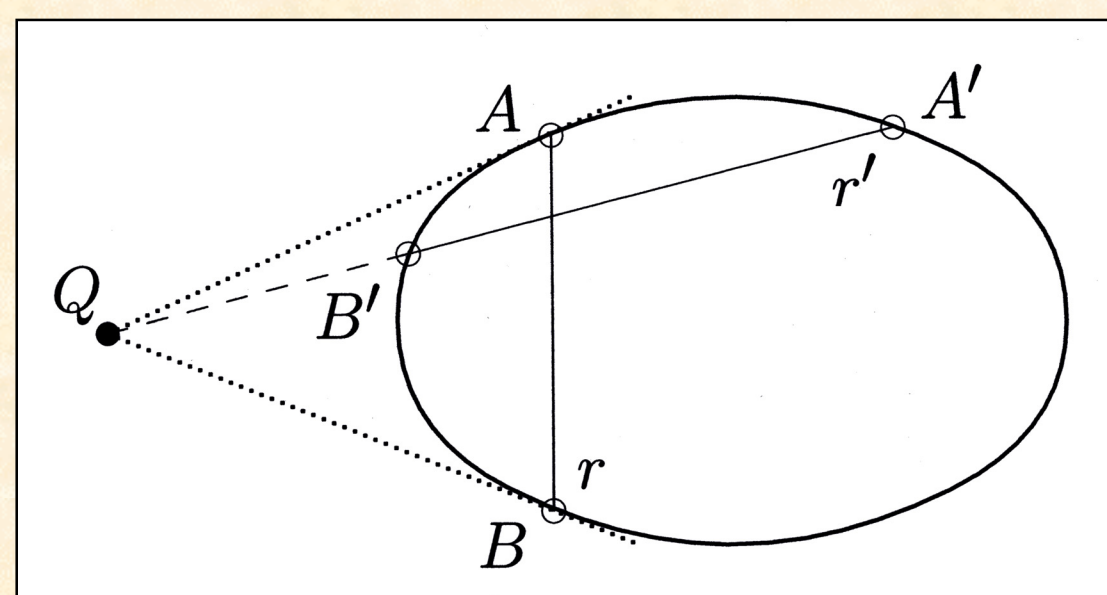
PERPENDICULARIDAD

Dos rectas $r=AB$ y $r'=A'B'$ son *perpendiculares* si existe un movimiento que superpone los ángulos adyacentes α y β (es decir, si esos ángulos son iguales o *congruentes*). En tal caso los ángulos α y β se llaman *rectos*.

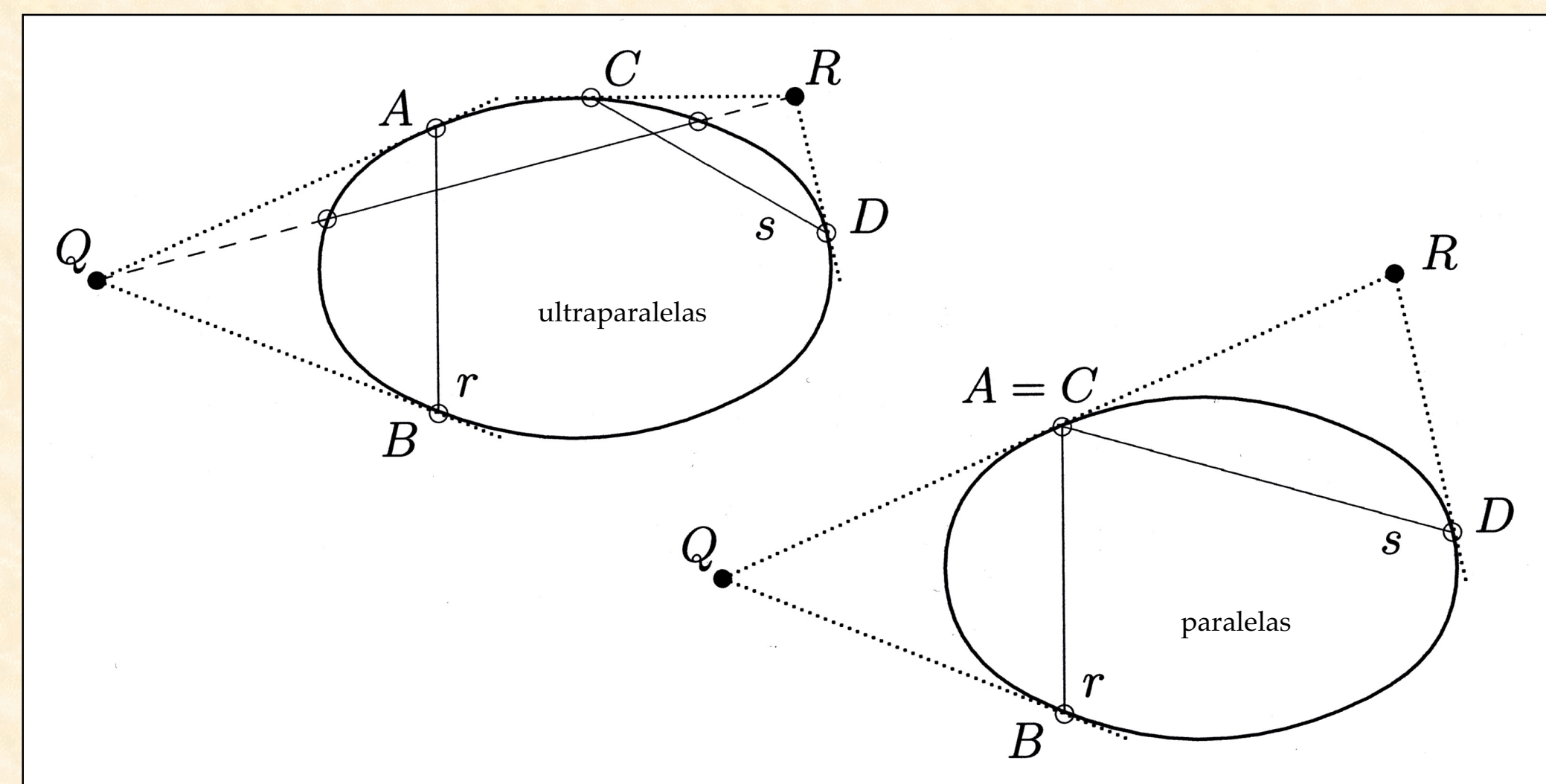


POLARIDAD

Se llama *punto polar* de una recta $r=AB$ al punto Q , intersección de las dos tangentes a E en los puntos A y B ; este punto del plano proyectivo no está en el plano hiperbólico.



La polaridad proporciona una formulación proyectiva de la perpendicularidad en el plano hiperbólico, pues se prueba que *dos rectas son perpendiculares si una pasa por el punto polar de la otra*.



Un hecho natural para la intuición euclídea es que en el plano hiperbólico *dos rectas ultraparalelas tienen siempre una perpendicular común*, pero esa misma intuición es contraria al hecho de que *dos rectas paralelas no la tengan*.