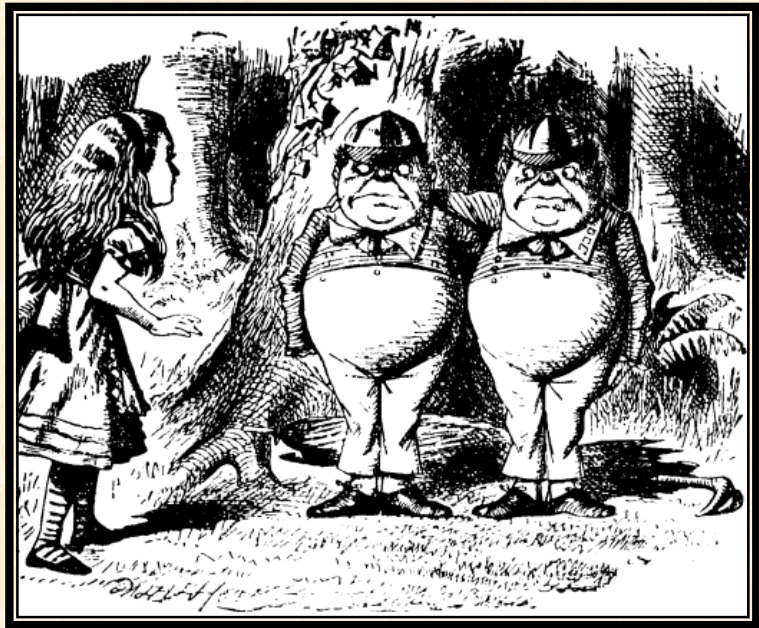


ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

EL REDESCUBRIMIENTO DE LA GEOMETRÍA PURA

En el siglo XVIII se abandonan los métodos sintéticos en los estudios geométricos a favor de los métodos analíticos, que usaban la geometría de coordenadas. La Geometría pura se convierte, simplemente, en una interpretación del álgebra o en una guía para los procesos algebraicos. Así se deduce por ejemplo de comentarios de LEONHARD EULER (1707–1783) en sus obras. Conviene recordar, no obstante, a matemáticos ingleses como COLIN MACLAURIN (1698–1746), que siguieron fieles a la tradición geométrica de Sir ISAAC NEWTON (1642–1721). Fue en en el siglo XIX cuando se produjo el renacimiento de la geometría, a partir del desarrollo de la *dualidad* y de las *coordenadas homogéneas*, que supusieron un gran avance en la consolidación de lo que sería la Geometría Projectiva propiamente dicha. El catalizador final fue la fuerte controversia *geometría sintética versus geometría analítica*.



DUALIDAD

¿Cuántos planos hay contenidos en un punto? Tantos como puntos pasan por un plano. Y... contrariwise. (*Tweedledee en Alicia en el país de las maravillas*, de LEWIS CARROLL.)

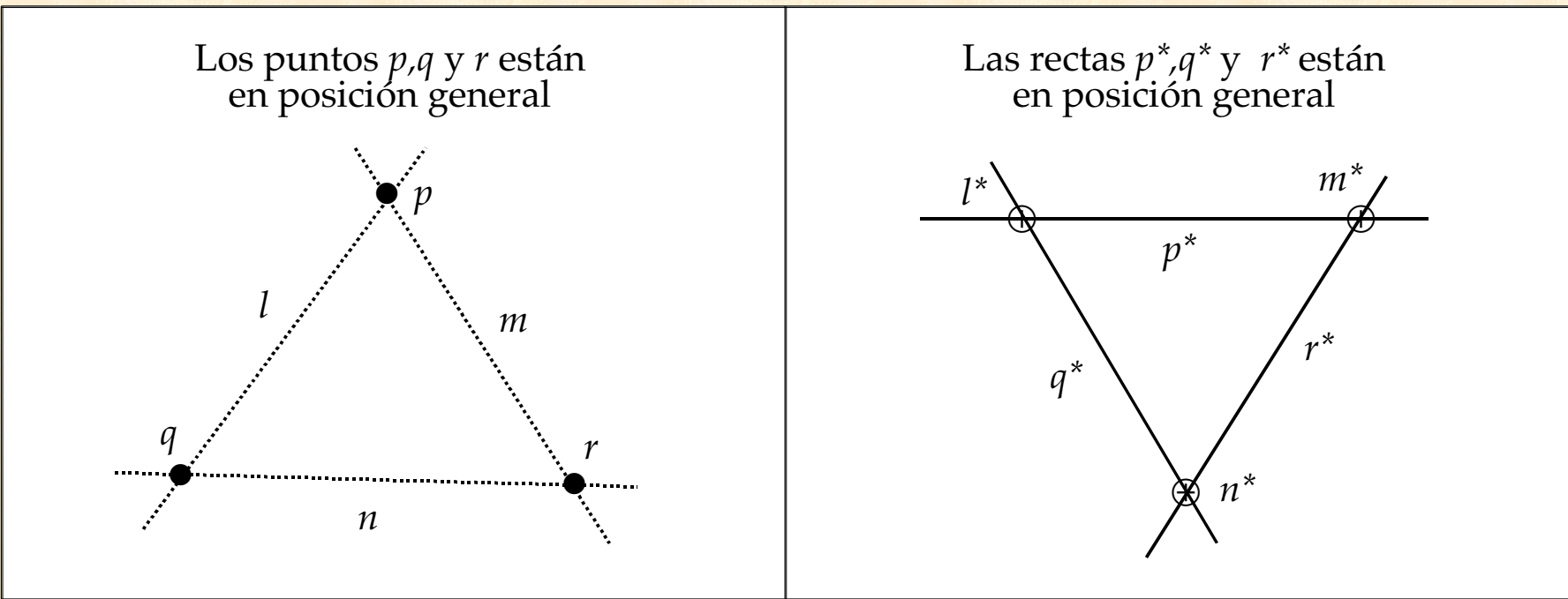
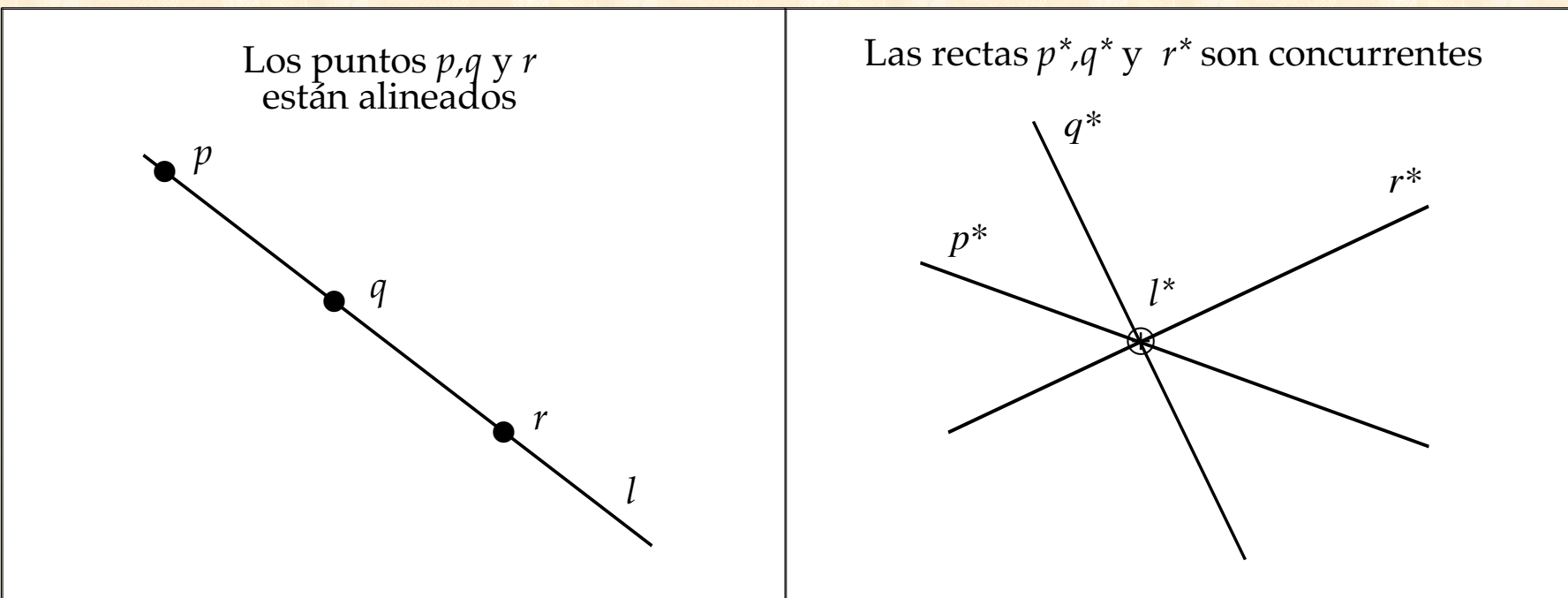
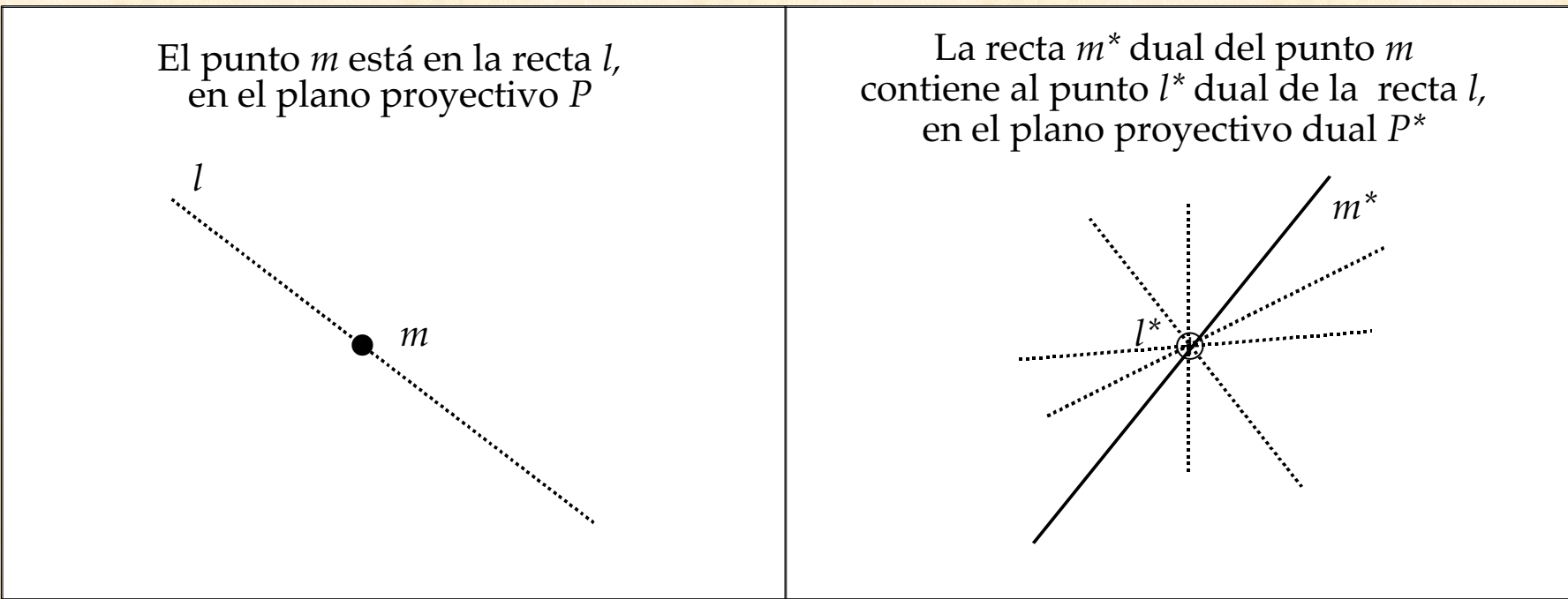
La dualidad es un concepto omnipresente en toda la Matemática, pero tal vez sea en Geometría Projectiva donde mejor puede ilustrarse su interés. Es un diccionario que permite traducir de un contexto a otro nociones y resultados. Podemos formularla técnicamente como sigue:

V = espacio vectorial de dimensión $n+1$	V^* = espacio vectorial dual, formado por las aplicaciones lineales $h:V \rightarrow K$ con valores en el cuerpo base K
P = espacio proyectivo de dimensión n formado por las rectas vectoriales de V	P^* = espacio proyectivo dual, formado por los hiperplanos proyectivos H de P , que se representan mediante una ecuación $h=0$, que está determinada salvo proporcionalidad
L = subvariedad proyectiva de P	L^* = subvariedad proyectiva dual, formada por todos los hiperplanos H de P que contienen a L .

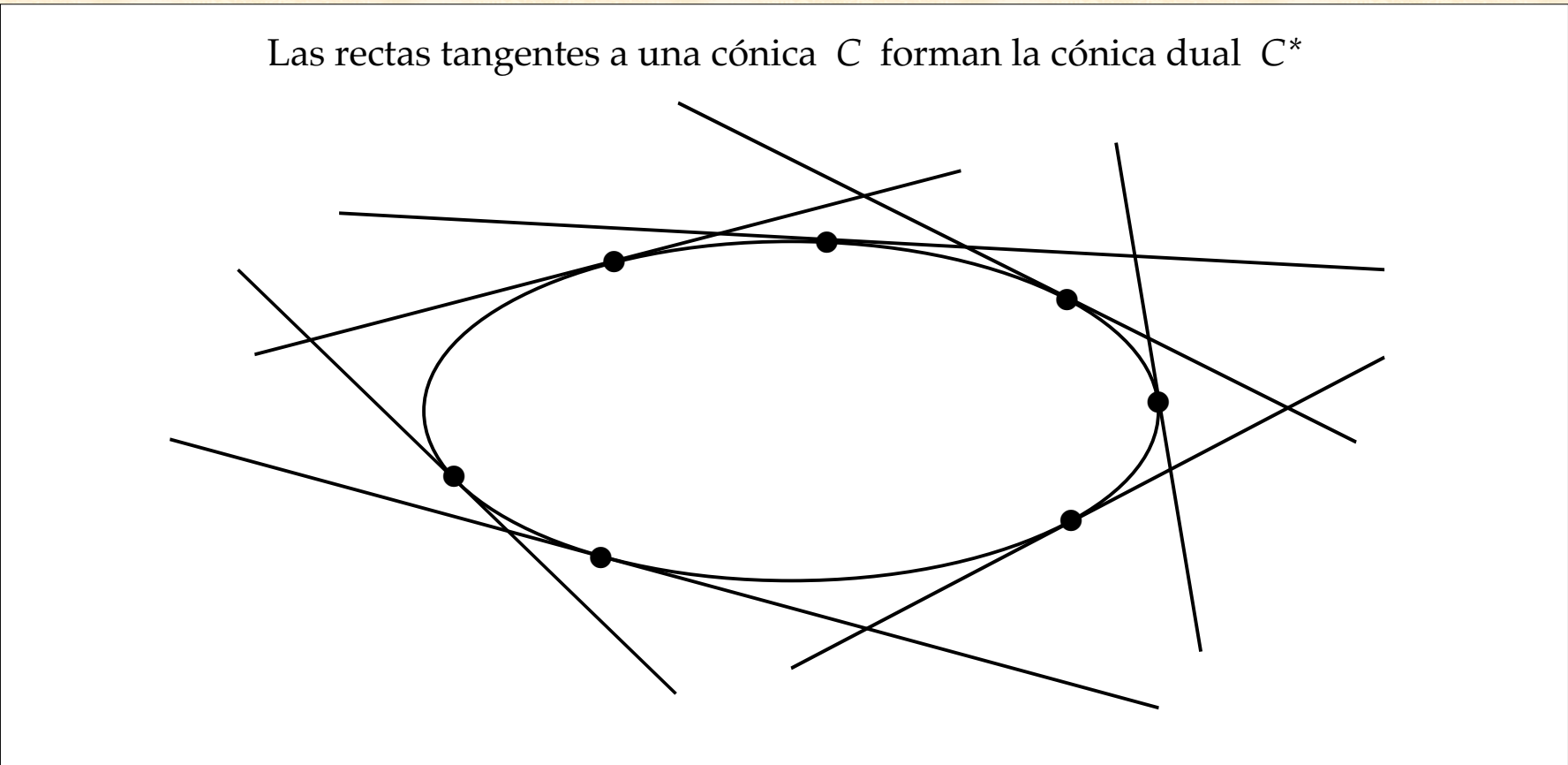
Las dos propiedades fundamentales de esta dualidad son:

- $\dim(L) + \dim(L^*) = n-1$.
- Si L contiene a M , entonces L^* está contenida en M^* .

En el plano proyectivo, una recta tiene por dual un haz de rectas, que se identifica con su punto base, y se obtiene lo siguiente:



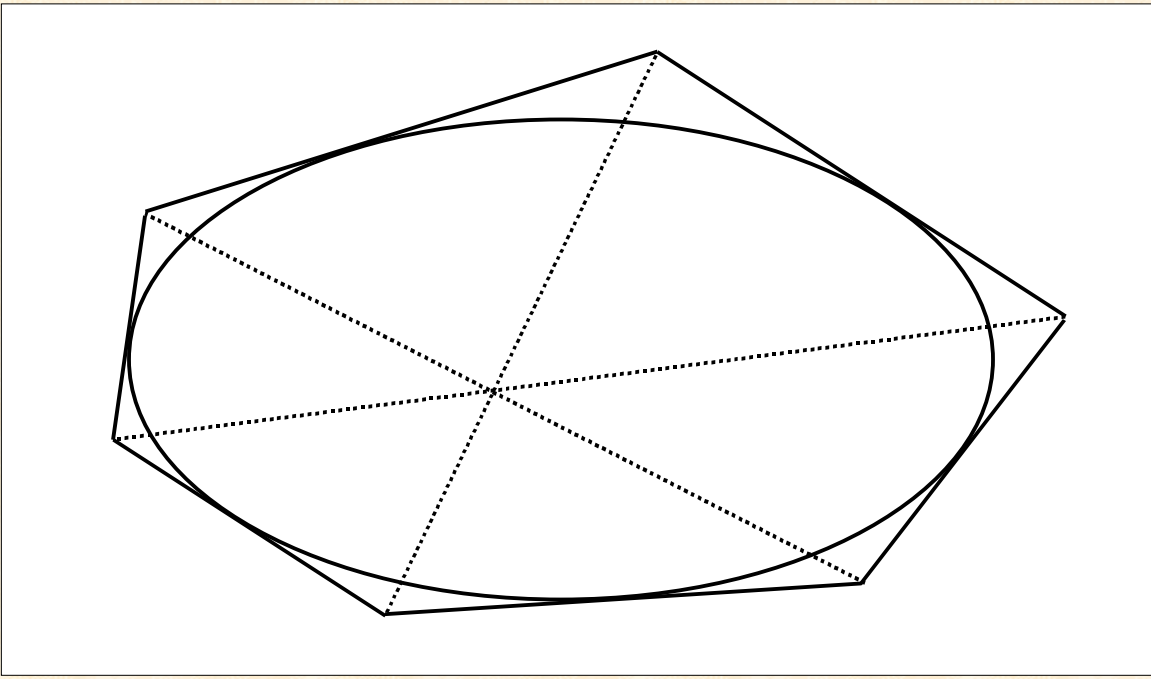
Una vez se conoce el diccionario entre variedades y variedades duales, se cumple el denominado *Principio de dualidad*, según el cual una proposición relativa a variedades proyectivas es cierta si y sólo si es cierta su dual. Este principio fue establecido inicialmente por JEAN-VICTOR PONCELET (1788–1867), pero ligado a la noción de polaridad respecto de una cónica dada, que ya hemos descrito anteriormente.



Tal vez uno de los ejemplos más bellos de dualidad sea el denominado *Teorema de Brianchon*, que es el enunciado dual del *Teorema de Pascal*. En efecto, utilizando la dualidad asociada a una cónica, JULIEN BRIANCHON (1785–1864) demostró lo siguiente:

Teorema de Brianchon

Si se circunscribe un hexágono a una cónica, las diagonales que unen vértices opuestos son concurrentes en un punto.



El *Principio de dualidad general*, formulado como antes, pero independientemente de la polaridad respecto de una cónica, se debe a JOSEPH-DIEZ GERGONNE (1771–1859).

COORDENADAS HOMOGÉNEAS

La construcción del espacio proyectivo como el conjunto de las rectas (vectoriales) de un espacio vectorial hizo necesaria la consideración de nuevos sistemas de coordenadas que permitieran cierta agilidad y eficacia en los cálculos. Uno de los primeros en utilizar otro tipo de coordenadas fue AUGUSTUS FERDINAND MÖBIUS (1790–1868) en su trabajo de 1827 sobre el *cálculo baricéntrico*. Se construyen las coordenadas de un punto en el plano en relación a los vértices de un triángulo y si estamos en el espacio con relación a un tetraedro. El punto de coordenadas (1,1,1) es el baricentro de un triángulo, y el punto (1,1,1,1) es el baricentro de un tetraedro. Estas ideas le permitieron precisar los estudios de la razón doble y de las colineaciones. Las coordenadas de MÖBIUS de un punto no son únicas, pero sí las *razones entre las coordenadas*, con lo cual tienen ya un carácter proyectivo. KARL WILHELM FEUERBACH (1800–1834) y ÉTIENNE BOBILLIER (1798–1840) publicaron en la misma época resultados parecidos a los de MÖBIUS.

El paso decisivo lo dio JULIUS PLÜCKER (1801–1868), que fue quien más eficazmente aplicó estos métodos a la Geometría Projectiva. A él debemos las *coordenadas homogéneas*, que definió de dos formas. Primero consideró un triángulo fijo y tomó como coordenadas de un punto P las distancias a los tres lados de ese triángulo. Más tarde introdujo el caso especial en el que uno de los lados del triángulo está situado en la *recta del infinito*, y así surgieron las coordenadas homogéneas tal como se conocen actualmente: las coordenadas de un punto P del plano son (x,y,z) , donde

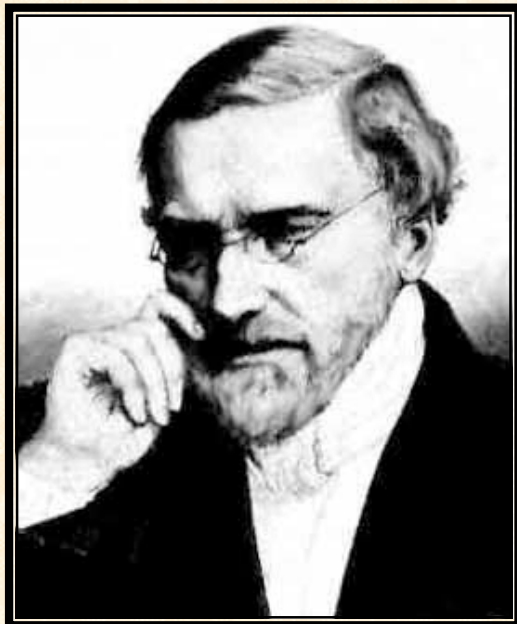
$$x = Xz \\ y = Yz$$

y (X,Y) son las coordenadas *cartesianas* del punto P cuando los ejes de coordenadas son los dos lados del triángulo que no están en la recta del infinito. Con esto las coordenadas de P no son únicas, pues (kx,ky,kz) corresponden al mismo punto, siempre que k no sea nulo. Es decir, todos los puntos de una recta del espacio vectorial pasan a ser el mismo en el plano proyectivo asociado a ese espacio vectorial.

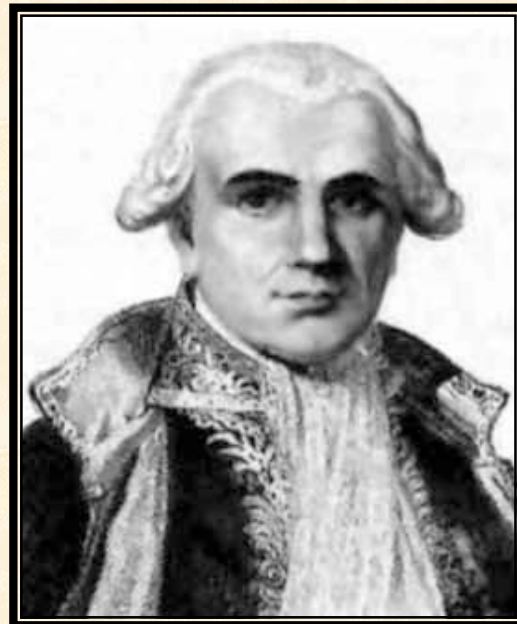
Al aplicar esta relación entre las coordenadas cartesianas y las homogéneas a la ecuación de una curva en el plano afín, obtenemos una *ecuación homogénea*: ésta no es más que la homogeneización de aquella. Esa ecuación homogénea es la de una curva del plano proyectivo, obtenida añadiendo a la curva afín los puntos que resultan al hacer $z=0$ en la ecuación homogénea, es decir, los puntos que tiene en el infinito.

La definición de coordenadas homogéneas permitió a PLÜCKER formalizar muchas ideas geométricas que sentaban las bases de la naciente Geometría Projectiva. De hecho, definió también las coordenadas de rectas del plano, lo cual le permitió considerar con precisión la dualidad punto–recta del plano proyectivo y zanjar de paso la polémica entre PONCELET y GERGONNE sobre la diferencia entre polaridad asociada a una cónica y dualidad general.

En 1831, PLÜCKER amplió sus estudios al espacio proyectivo y dio coordenadas a las rectas del espacio, aportando de este modo ideas esenciales para los estudios de lo que luego serían las *grassmannianas*.



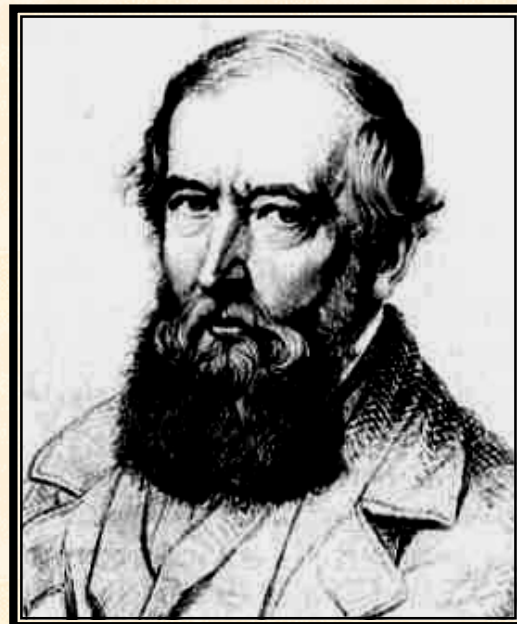
J.-V. Poncelet



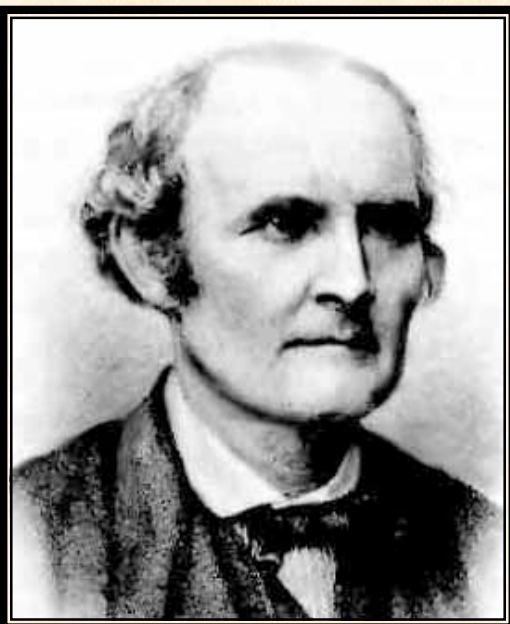
G. Monge



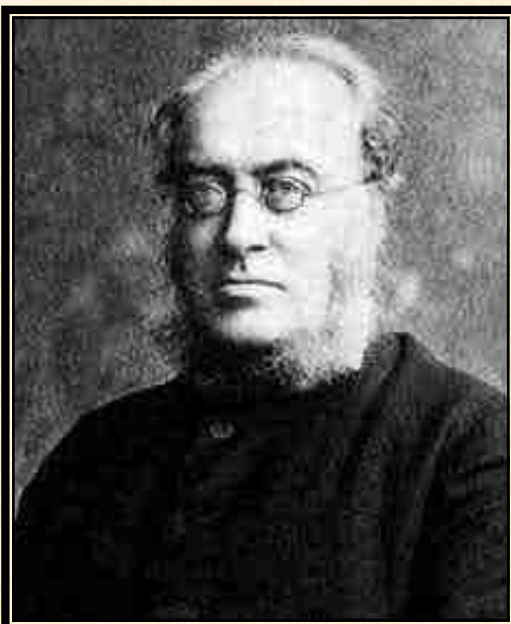
L. Carnot



J. Steiner



A. Cayley



G. Salmon



F. Klein

GEOMETRÍA SINTÉTICA VERSUS GEOMETRÍA ANALÍTICA

A finales del siglo XVIII se empiezan a oír voces a favor de una vuelta a la geometría sintética, son las de GARPARD MONGE (1746–1810) y LAZARD CARNOT (1753–1823) en la École Polytechnique. MONGE tiene importancia por sus propias contribuciones y de modo especial porque preparó el terreno para el siglo XIX, al transmitir estas ideas con entusiasmo a discípulos suyos tan importantes como el propio CARNOT, CHARLES DUPIN (1784–1783), BRIANCHON, JEAN-BAPTISTE BIOT (1744–1862) y PONCELET.

Se empezó a trabajar en la Geometría Euclídea y también en la Projectiva partiendo de cero, pues los trabajos de DESARGUES se desconocían. CARNOT comenzó “liberando a la geometría de los jeroglíficos del análisis” y para ello recurrió a métodos puramente geométricos en sus demostraciones.

PONCELET fue quien dio el impulso definitivo en el renacimiento de la geometría pura. Fue el primero en considerar la Geometría Projectiva como una nueva rama de las matemáticas con objetivos y métodos propios. Distinguió entre las propiedades que son proyectivas y las que no. Y en cuanto a los métodos recuperó los de DESARGUES y PASCAL y utilizó también las llamadas *transformaciones projectivas*.

En la primera mitad del siglo XIX se estableció una gran controversia entre *geómetras sintéticos* y *geómetras analíticos*. Las objeciones que se ponían a la geometría analítica eran del tipo siguiente:

- ¿Es realmente geometría? Los métodos son puramente algebraicos y los resultados también, con lo que se olvida el significado geométrico.
- Se pierde la conexión entre el punto de partida y el de llegada en el proceso de pequeños pasos algebraicos cuyo significado geométrico no es claro.
- El método geométrico puro es más simple e intuitivo en sus demostraciones.
- La geometría es la verdad acerca del mundo real; sin embargo el análisis y el álgebra no son verdades en sí mismas.

La geometría analítica tiene, sin embargo, la ventaja de la potencia por la generalidad de su método, pues todos los problemas se resuelven por procedimientos uniformes, mientras que en la geometría sintética cada problema depende de la figura particular considerada.

Representantes de los sintéticos fueron PONCELET, JACOB STEINER (1796–1863) y CHASLES. Representantes de los analíticos serían MÖBIUS y PLÜCKER y GERGONNE.

La rivalidad tuvo momentos de gran tensión, como por ejemplo cuando STEINER amenazó a los editores de la prestigiosa revista *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle) con no publicar más en ella si continuaba admitiendo los trabajos de PLÜCKER.

Después de esta fase, en la que hay también otras figuras reseñables, como ARTHUR CAYLEY (1821–1895), GEORGE SALMON (1819–1904) y JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814–1897), géometras analíticos ingleses, la Geometría Projectiva entró en una etapa de madurez cuyo nombre clave fue VON STAUDT, que mostró cómo la Geometría Projectiva engloba a la Geometría Euclídea. Ya más tardíamente pero en el siglo XIX aún, FÉLIX KLEIN (1849–1925) completó la obra de STAUDT mediante la *teoría de los grupos de transformaciones* en su famoso “Programa de Erlanger”.