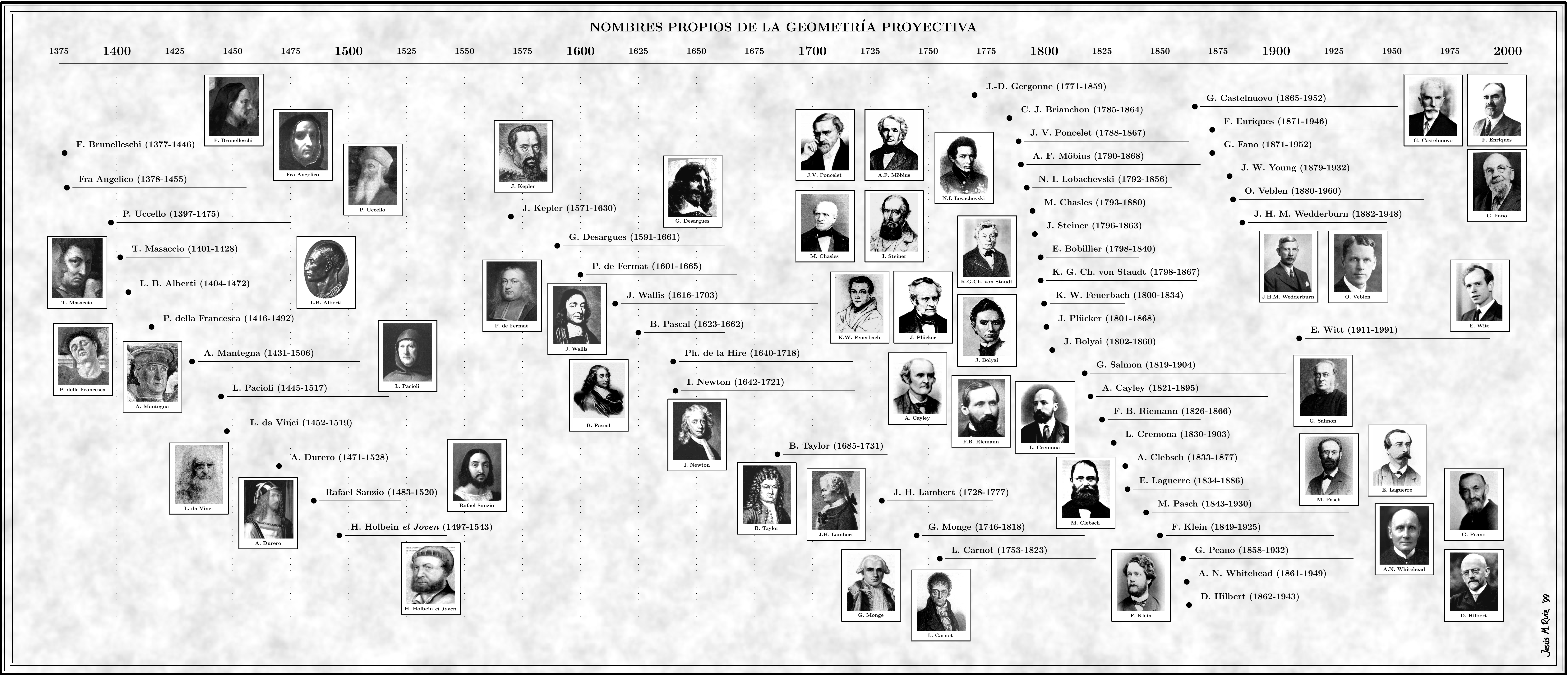
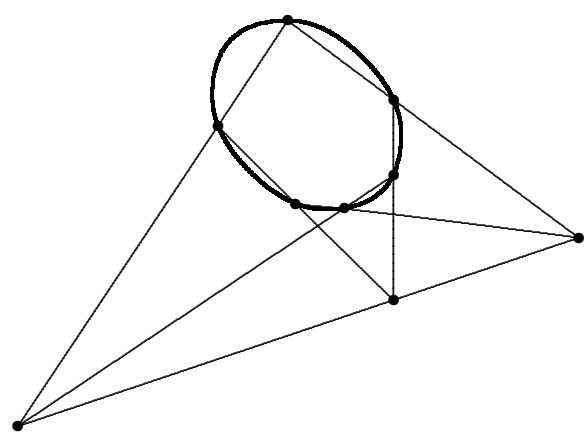
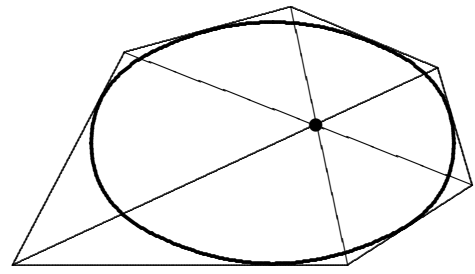




Las primeras ideas de Geometría Proyectiva aparecieron en la actividad práctica de artistas y arquitectos del Renacimiento. Los pintores **Fra Angelico** y **Paolo Uccello** se valieron de la *perspectiva* para crear impresión de profundidad. La necesidad de una base matemática para su trabajo era clara para los artistas de la época, y la elaboró el arquitecto **Filippo Brunelleschi**. Después, **Tommaso Masaccio** y **Andrea Mantegna** la asumieron definitivamente para la pintura. **Piero della Francesca**, **Leone Battista Alberti** y **Alberto Durero** reflexionaron sobre las nociones de *proyección* y *sección* en su afán de entender el problema de la representación plana de un objeto real tridimensional. **Hans Holbein el Joven** mostró en uno de sus cuadros el fenómeno de la *anamorfosis*, comportamiento paradójico ya descrito por **Leonardo da Vinci**. El primer matemático que hizo uso de estas ideas fue el francés **Girard Desargues**.



Desargues, arquitecto e ingeniero militar de Lyon, publica en París su *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* [Primer borrador sobre los resultados de intersectar un cono con un plano]. A pesar de lo poco convencional del lenguaje, en este tratado se ofrece un tratamiento bello y original de las cónicas. Aquí aparece por primera vez el término *involución*. Los métodos proyectivos permiten a Desargues un tratamiento general y unificado de las cónicas, en contraposición con los métodos clásicos de **Apolonio**. El libro se perdió y sólo se encontró una copia en 1847 en una librería de París.



**Blaise Pascal** publica a los 16 años su *Essay pour les coniques*. Aquí aparecía su *mysterium hexagrammicum*, hoy "hexagrama místico" de Pascal, según el cual *los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica se cortan en tres puntos alineados*. Para dar plena validez a este teorema hay que recurrir a los puntos de infinito del plano.

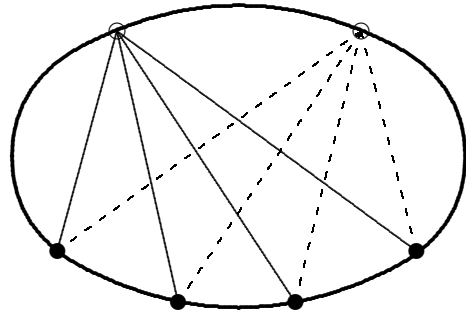
Después de un largo período de oscuridad el estudio de la Geometría Proyectiva renace en la École Polytechnique de París en torno a la figura de **Gaspard Monge**. Un discípulo suyo, **Julien Brianchon**, demuestra a los 21 años el teorema que lleva su nombre: *En un hexágono circunscrito a una cónica las tres diagonales se encuentran en un punto*. Este teorema es el primer caso de *dualidad* en Geometría Proyectiva: es dual del teorema de Pascal.

**Jean-Victor Poncelet** publica su *Traité des propriétés projectives des figures*. Aquí se recogen, en parte, las reflexiones del autor como prisionero de guerra en Rusia durante las campañas napoleónicas. Poncelet defiende a ultranza el uso de métodos sintéticos. Su trabajo se concentra en el estudio de las figuras *homólogas*, que son las que se derivan una de otra por una sucesión de *proyecciones* y *secciones*. Su objetivo era encontrar para cada figura otra homóloga más simple cuyo estudio permitiera deducir propiedades de la primera. Sus tres aportaciones principales son:

- El principio de continuidad o *permanencia de las relaciones matemáticas*.
- La formulación del principio de *dualidad*, que trajo una amarga polémica de prioridad con **Joseph-Diez Gergonne**.
- El descubrimiento de los denominados *puntos circulares del infinito*, por los que pasan todos los círculos del plano.

**Jacob Steiner**, hijo de un granjero suizo, fue también un apóstol de los métodos sintéticos y un extremista de los métodos didácticos de enseñanza de la Geometría: la enseñaba sin figuras y, en ocasiones, a oscuras. Fue el inventor de un nuevo método de definir cónicas a partir de homografías entre haces de rectas. Usó sistemáticamente la *razón doble* y el principio de *dualidad*, pero se negó a admitir elementos imaginarios ("fantasmas de la Geometría").

**Michel Chasles** descubrió independientemente alguno de los resultados de Steiner. Fue practicante del llamado *método mixto*: pensaba sus resultados analíticamente y los presentaba sintéticamente. Chasles introdujo el término *homografía* y definió las *correlaciones*. Uno de sus resultados más conocidos asegura que *cuatro puntos fijos de una cónica determinan con un quinto punto de la misma, cuatro rectas cuya razón doble no depende de ese último punto*.



**Julius Plücker** justifica rigurosamente el principio de dualidad. Plücker abogaba por el uso de los métodos algebraicos en detrimento de los sintéticos: Fue uno de los inventores de las *coordenadas homogéneas* (descubiertas también por **Karl Wilhelm Feuerbach**, **Étienne Bobillier** y **August Ferdinand Möbius**). Estas coordenadas fueron un instrumento muy adecuado para tratar nociones relacionadas con los puntos de infinito. Sin embargo, la influencia de Steiner, que rechazaba los métodos analíticos, llevó a Plücker a abandonar la Geometría y dedicarse a la Física.

Möbius se ganó la vida como astrónomo. Utilizó coordenadas para representar las curvas y superficies mediante ecuaciones *homogéneas* (de ahí el nombre de las coordenadas). Möbius distinguió cuidadosamente entre los distintos tipos de transformaciones de un plano: (a) *congruencias*, cuando las figuras que se corresponden son iguales, es decir, se conservan longitudes y ángulos, (b) *semejanzas*, cuando las figuras que se corresponden son semejantes, es decir, se conservan ángulos, (c) *afinidades*, cuando se conserva el paralelismo, pero no necesariamente la longitud ni la forma, y (d) *colineaciones*, cuando las rectas se transforman en rectas. Möbius probó que *toda colineación del plano proyectivo real es una homografía*.

**Karl Georg Christian von Staudt** publica su libro *Geometrie der Lage* [Geometría de posición], en el que desarrolla por primera vez la Geometría Proyectiva sin referencia a conceptos métricos o relacionados con las magnitudes. De este modo, la Geometría Proyectiva se establece como una geometría que engloba la Geometría Euclídea. El libro de von Staudt tenía el defecto de usar el axioma de las paralelas, que es una noción afín, no proyectiva. Posteriormente **Felix Klein** remediaría esta dificultad.

**Edmond Laguerre** se propone establecer las propiedades básicas de la Geometría Euclídea en términos proyectivos y encuentra una celebrada fórmula que mide el ángulo de dos rectas en términos de la razón doble de la cuaterna formada por esas rectas y otras dos que pasan por los puntos circulares del infinito. **Arthur Cayley** trabajó independientemente en la misma dirección. Cayley consideró una cónica en el plano (*el absoluto*) en lugar de los puntos circulares y probó que las propiedades métricas de las figuras son sus propiedades proyectivas relativas al absoluto. Esto llevó a Cayley a afirmar dramáticamente: "La Geometría Métrica es una parte de la Geometría Proyectiva".

Klein ve las posibilidades unificadoras del concepto de grupo en Geometría, y en su *Programa de Erlangen* muestra cómo sirve para caracterizar las diversas geometrías aparecidas durante el siglo XIX. Según ese programa todas las geometrías son subgeometrías de la Geometría Proyectiva. Este planteamiento es posterior al descubrimiento de un modelo proyectivo del plano hiperbólico. En el establecimiento de este modelo se incorporan y generalizan las ideas de Cayley sobre el absoluto.

**Moritz Pasch** realiza el primer intento de fundamentación axiomática de la Geometría Proyectiva. Contribuciones posteriores se deben a **Giuseppe Peano**, **Federigo Enriques** y **Alfred North Whitehead**. En el texto clásico *Projective Geometry* de **Oswald Veblen** y **John Wesley Young** se ofrece un conjunto independiente de axiomas y se presenta una organización de la Geometría Proyectiva basada en las ideas de Klein, según las cuales la Geometría Proyectiva es el marco general en el que aparecen diferentes especializaciones (Geometría Euclídea y geometrías no euclídeas).