LES MATHÉMATIQUES " MODERNES " :

UNE ERREUR PÉDAGOGIQUE ET PHILOSOPHIQUE ?

par René THOM

I.H.E.S., Bures-sur-Yvette

L'Age de la science, juillet 1970

Traduit en américain et publié dans l'American Scientist en novembre 1971

Dans l'esprit de la plupart de nos contemporains, les mathématiques dites modernes jouissent d'un grand prestige : elles figurent entre la Cybernétique et l'Informatique dans l'armoire aux jouets prônés par une publicité de mauvais aloi comme l'acquis essentiel de la technique actuelle, l'outil indispensable au développement futur de toute science. Mais il y a plus : depuis la modernisation des programmes, les mathématiques " modernes " ont fait leur entrée dans la vie familiale. Bien des parents - devenus incapables d'aider leur progéniture - s'en sont inquiétés : ne reconnaissant plus dans le vocabulaire de leurs enfants les vieilles notions familières, ils se sont sentis égarés par cette nouvelle terminologie. Perplexes, certains y ont vu un nouveau symptôme de l'abîme qui s'ouvre entre les générations; ils ont alors adopté une attitude d'obstruction systématique à l'égard des nouveautés. D'autres au contraire - et le cas est fréquent chez les enseignants - ont accepté avec enthousiasme les nouveaux programmes, les nouvelles notions, les nouveaux symboles. Que faut-il en penser ?

Les modifications des programmes

Établissons un bilan succinct des transformations apportées aux programmes :

1° Notions introduites.

A. Théorie " élémentaire " des ensembles ; usage des symboles ; applications d'un ensemble dans un autre ; quantificateurs. Ce point est évidemment le plus frappant : les " ensembles " apparaissent maintenant, avec une sorte d'ubiquité de l'École maternelle à la Terminale. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

B. Développement de notions algébriques : lois de composition sur un ensemble ; notions de groupe, d'anneau, de corps. Introduction du corps complexe en classe de Terminale.

C. Les notions fondamentales du calcul différentiel et intégral, dérivée, primitives, fonctions élémentaires comme Log et Exp, sont introduites plus tôt.

2° Notions éliminées.

La géométrie euclidienne traditionnelle, particulièrement ses raffinements de géométrie du triangle.

On notera que le bilan, au total, s'est traduit par un accroissement substantiel du matériel enseigné dans l'enseignement Secondaire. Si un programme mérite le qualificatif de " démentiel ", c'est bien celui, en Mathématiques, de la Terminale C. Pouvait-on échapper à cette inflation? On remarquera d'ailleurs que la tendance à algébriser l'enseignement au détriment du matériel géométrique s'est trouvée encore amplifiée dans l'enseignement des Facultés.

L'élimination de la géométrie

L'élimination de la géométrie euclidienne traditionnelle s'est fondée sur deux arguments ; le premier est théorique : les travaux axiomatiques issus des Grundlagen der Geometrie de Hilbert ont montré que la prétendue rigueur des Éléments d'Euclide était, dans une large mesure, illusoire, car elle était compromise par de fréquents appels à l'intuition. En conséquence, il est préférable de l'éviter, en développant des théories comme l'algèbre, où une présentation rigoureuse est possible. Le second est pratique : la géométrie Euclidienne traditionnelle, dans ses développements de géométrie du triangle, est inutile et pédantesque. Qui, dans sa vie, a eu jamais à se servir de la " droite de Simpson " ou du " cercle de Feuerbach "?

Algèbre et géométrie

Discutons d'abord l'argument d'utilité. L'algèbre est, dit-on, plus *utile* que la géométrie, plus nécessaire. Il n'est certes pas question de nier l'utilité scientifique générale d'une théorie comme l'algèbre linéaire, de certaines notions d'algèbre multilinéaire. Pour ce qui est de l'algèbre commutative générale - polynômes, etc.... on doit déjà se montrer plus sceptique. Et, dans sa vie courante, qui a jamais eu à résoudre une équation du second degré, à se servir explicitement de la notion de module sur un anneau ? L'argument d'utilité n'est donc pas, en ce qui concerne l'algèbre, aussi contraignant qu'il paraît. Il vaut par contre à plein pour les notions de calcul différentiel et intégral - Point C ci-dessus -, car ce sont là des connaissances de base indispensables à toute présentation de la physique classique.

A un niveau élémentaire, certes, l'usage de l'algèbre apporte de massives simplifications. On se souvient du problème d'arithmétique du certificat d'études, dont la solution " par le raisonnement " exigeait une agilité d'esprit peu commune, alors que la solution par l'algèbre n'exigeait que l'emploi correct d'un mécanisme formel élémentaire. Là, l'économie de pensée apportée par l'algèbre n'est pas niable. Mais, dès qu'on traite de situations plus compliquées, cet avantage de l'algèbre tend à s'effacer. Descartes avait imaginé la géométrie analytique pour réduire la géométrie à l'algèbre. Or, c'est un fait d'expérience - bien connu de tous ceux qui ont pratiqué l'ancienne " Taupe " - que l'avantage des méthodes analytiques sur les méthodes géométriques, dans un problème de nature quelque peu théorique et générale, est souvent loin d'être décisif.

Le " modernisme "

Au niveau des mathématiques actuelles, l'usage de l'algèbre en tant qu'instrument de démonstration est certes important, peut-être même essentiel. Mais on peut raisonnablement se demander si les besoins des mathématiciens professionnels doivent être pris en considération au niveau de l'enseignement secondaire. Imbus d'esprit bourbakiste, les mathématiciens de la génération actuelle ont eu la tendance bien naturelle de faire admettre dans l'enseignement supérieur et secondaire les théories, les structures algébriques qui leur avaient été si utiles dans leurs propres recherches, et qui triomphent dans l'esprit de la mathématique du temps. Mais la question doit être posée, si, au niveau secondaire au moins, on doit admettre dans les programmes les dernières trouvailles de la technique du moment. De ce point de vue, les mathématiciens ne sont pas les seuls à succomber à la tentation moderniste. J'ai vu des manuels de biologie - en première ou terminale - où on présentait comme vérité scientifique définitivement établie la double hélice d'ADN de Watson et Crick, et son mécanisme de réplication avec l'enzyme réplicase à la fourche. Il ne devrait jamais être question d'admettre une nouveauté dans l'enseignement sans un certain recul. En France, on aurait dû pouvoir compter sur le corps des inspecteurs généraux pour assurer cette nécessaire stabilité des programmes. Mais, sans doute par crainte de voir un scepticisme de bon aloi attribué à la sclérose de l'âge, cette barrière n'a pas fonctionné avec toute l'efficacité désirable. Et puis, il faut bien que les manuels changent, et que les éditeurs vivent...

Le problème de géométrie

Enfin, l'argument d'utilité dans les programmes n'est peut-être pas d'un poids décisif. Ignorons, comme vestige d'un passé révolu, la " culture ", " ce qui reste quand on a tout oublié ". De bons esprits n'en persistent pas moins à croire que, sous une forme ou sous une autre, l'un des buts de l'enseignement est la " sélection ", c'est-à-dire de déceler au mieux les aptitudes de chaque élève, et de les développer au maximum pour les plus doués. Or, je prétends qu'il est impossible d'exercer une telle détection dans une discipline qui ne comporterait pas quelques éléments gratuits, inutiles. En effet, pour juger pleinement des possibilités d'un élève, il faut le mettre dans une situation non réceptive, mais active, il faut faire appel à son initiative, à son esprit d'entreprise individuel. Or ceci n'est guère concevable dans le cadre d'une théorie " utile ", dont tous les éléments, fixés par leur utilité technique ultérieure, sont enseignés dogmatiquement, et où la vertu scolaire par excellence est l'assimilation, la mémorisation rapide et correcte des données. De ce point de vue, seules les théories qui présentent un aspect ludique ont vertu pédagogique, et, de tous les jeux, la géométrie euclidienne, qui se réfère constamment à un donné intuitif sous-jacent, est le moins gratuit, le plus riche en signification. Ainsi la tendance actuelle, qui est de remplacer la géométrie par l'algèbre, est pédagogiquement néfaste, et devrait être renversée. Il y a à cela une raison simple : alors qu'il y a des problèmes de géométrie, il n'y a pas de problèmes d'algèbre. Un problème d'algèbre ne peut guère être qu'un simple exercice requérant l'application aveugle de règles de calcul, d'un schéma formel préétabli. Sauf rarissimes exceptions, il n'est pas question de faire démontrer par un élève un théorème d'algèbre : car, ou la propriété demandée est presque immédiate, et se démontre par substitution directe de la définition au défini, ou le problème est une vraie question d'algèbre théorique, et sa résolution excédera les capacités de l'élève le plus doué. Avec à peine un peu d'exagération on pourrait dire que toute question d'algèbre est " triviale " - ou indécidable. Au contraire, le problème classique de géométrie peut présenter une gamme très échelonnée de difficultés.

Reste que, de toute manière, le problème de géométrie exige beaucoup de temps, d'efforts, une réflexion soutenue, des capacités combinatoires dont peu d'élèves sont capables. Peut-être la géométrie euclidienne est-elle, comme la version latine, un de ces exercices nobles et désuets, réservés à une élite, et incompatibles avec un enseignement de masse. Si tel était le cas, alors l'éviction de la géométrie serait essentiellement un problème sociologique que je préférerais ne pas discuter. Mais ce serait en tout cas une erreur considérable que de croire faciliter l'acquisition des mathématiques en remplaçant la géométrie par des structures algébriques inculquées massivement et prématurément faute d'une motivation convenable. De ce point de vue, l'introduction du corps des complexes dans le programme de terminale ne paraissait pas s'imposer.

La rigueur

Venons-en maintenant à la seconde objection contre la géométrie euclidienne, celle qui argue du caractère imparfait, non rigoureux, de l'axiomatique des Éléments. On rétorquera d'abord qu'il y a longtemps que l'enseignement de la géométrie a abandonné la rhétorique lourde et indigeste d'Euclide ; certains ont caressé l'espoir d'y substituer une version acceptable de l'axiomatique hilbertienne des " Grundlagen ". Espoir déçu, inutile de le préciser, par l'effroyable complexité de cette construction. On ne peut, en fait, prendre position dans ce problème sans répondre au préalable à une question de caractère philosophique : quelle conception faut-il se faire de la rigueur en mathématique ? Trois attitudes peuvent être adoptées :

a) *La conception formaliste.* A l'intérieur d'un système formalisé (S), est vraie une proposition (P) si elle peut se déduire des axiomes de (S) par un nombre fini d'opérations permises à l'intérieur de (S).

b) *La conception réaliste ou platonicienne.* Les êtres mathématiques existent indépendamment de notre pensée - en tant qu'Idées platoniciennes. Est vraie une proposition (P) qui exprime une relation existant effectivement entre Idées c'est-à-dire une Idée hiérarchiquement supérieure qui structure un ensemble d'Idées qui lui sont subordonnées.

c) *La conception empiriste ou sociologique.* Une démonstration (D) est tenue pour rigoureuse, si elle entraîne l'adhésion des meilleurs spécialistes du moment.

De ces trois attitudes la plus en faveur, actuellement chez les mathématiciens, est la première. C'est, à première vue, la plus séduisante. Elle ne soulève pas les difficultés ontologiques de b), elle n'a pas le vague et l'arbitraire de c). " La mathématique, science où l'on ne sait pas de quoi en parle, ni si ce qu'on dit est vrai (B. Russell). " Malheureusement, l'attitude formaliste pure est difficile à soutenir, et ceci, presque paradoxalement, pour des raisons purement formelles. On sait des difficultés de la formalisation de l'arithmétique liées au théorème de Gödel. M. Kreisel [3] a fait ici même le procès de l'attitude formaliste ; pour ma part, je me contenterai de l'apologue suivant : Supposons que, pour une théorie formalisée (S), on ait pu construire une machine électronique (M) susceptible d'effectuer à une vitesse terrifiante toutes les opérations de (S). Nous désirons vérifier une formule (F) de la théorie; après un calcul comportant 10^{30} opérations élémentaires, effectué en quelques secondes, la machine (M) nous donne une réponse positive. Quel mathématicien accepterait sans hésitation une telle " démonstration " comme valable, dans l'incapacité où il serait de vérifier une à une toutes les étapes de la démonstration ?

Le " sens " en mathématique

Tout mathématicien doté de tant soit peu d'honnêteté intellectuelle reconnaîtra que, dans chacune de ses démonstrations, il est capable d'attacher *un sens* à chacun des symboles qu'il manipule : en cela il diffère du physicien théoricien, qui, très fréquemment, n'hésite pas à se confier magiquement aux vertus du formalisme aveugle, dans l'espoir - souvent déçu - que " les lumières de la fin dissiperont les ténèbres du commencement ".

Mais si l'on abandonne la définition formaliste de la rigueur, il ne reste plus qu'à choisir entre les attitudes b) et c). Tout bien considéré, le mathématicien se doit d'avoir le courage de ses convictions intimes ; il affirmera donc que les structures mathématiques ont une existence indépendante de l'esprit humain qui les pense. Forme d'existence sans doute différente de l'existence concrète et matérielle du monde extérieur, mais néanmoins subtilement et profondément liée à l'existence objective. Car comment s'expliquer, si les mathématiques ne sont que le jeu gratuit, le produit aléatoire de nos activités cérébrales, leur indiscutable succès dans la description de l'univers ? Les mathématiques se rencontrent - non seulement dans l'agencement rigide et mystérieux des lois physiques - mais aussi, de manière plus cachée, mais aussi indubitable, dans le jeu infini de la succession des formes du monde animé et inanimé, dans l'apparition et la destruction de leurs symétries. C'est pourquoi, l'hypothèse d'Idées platoniciennes informant l'univers est - en dépit des apparences - la plus naturelle et - philosophiquement - la plus économique. Mais, de ce monde des Idées, les mathématiciens n'ont à chaque instant qu'une vision incomplète et fragmentaire. De ce fait, toute démonstration est avant tout la révélation d'une nouvelle structure, dont les éléments gisaient séparés dans l'intuition, et dont le raisonnement reconstruit la genèse progressive. En ce sens, toute démonstration est une " maïeutique " : il s'agit de recréer chez le lecteur les processus psychologiques propres à la manifestation de la vérité implicite, dont il détenait toutes les données mais qui restait voilée dans l'informulé. C'est en ce sens qu'il n'y a pas contradiction entre les points b) et c). Car le monde des Idées ne nous est pas donné intégralement d'un seul coup, il nous faut le recréer dans notre conscience par une reconstruction permanente et sans cesse recommencée.

Les adversaires de la thèse ontologique b) feraient bien de réfléchir au point suivant : il n'est pas, dans l'histoire des mathématiques, d'exemple où l'erreur d'un homme a entraîné la science dans une voie erronée ; très fréquemment, les mathématiques se sont égarées dans le développement formel de théories insignifiantes et sans intérêt. Elles l'ont fait dans le passé, elles le font actuellement, et le feront sans doute encore. Mais jamais une erreur de quelque importance n'a pu se glisser dans un résultat sans qu'elle soit presque aussitôt relevée. Comment un tel " consensus " pourrait-il s'expliquer, s'il ne répondait pas à un sentiment général, fruit du conflit de l'esprit avec des contraintes permanentes, intemporelles et universelles ? Dans cette confiance en l'existence d'un univers idéal, le mathématicien ne s'inquiétera pas outre mesure des limites des procédés formels, il pourra oublier le problème de la non-contradiction. Car le monde des Idées excède infiniment nos possibilités opératoires, et c'est dans l'intuition que réside *l'ultima ratio* de notre foi en la vérité d'un théorème - un théorème étant avant tout, selon une étymologie aujourd'hui bien oubliée, l'objet d'une vision.

Il faut en prendre son parti. Il n'y a pas de définition rigoureuse de la rigueur. Nous affirmerons donc : est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. Et cette évidence provient de la possibilité d'avoir de chacun des symboles utilisés une conception assez claire pour que leur combinatoire force la conviction. De ce point de vue, la rigueur (ou son contraire, l'imprécision) est fondamentalement une propriété *locale* du raisonnement mathématique. Point n'est besoin de grandes constructions axiomatiques, de machineries conceptuelles raffinées pour juger de la validité d'un raisonnement. Il suffit d'avoir du sens de chacun des symboles mis en jeu une intelligence assez nette, une vue assez complète de leurs propriétés opératoires.

Limites et nécessité de l'axiomatisation

Un tel point de vue conduit à prendre un certain recul vis-à-vis de l'axiomatisation. Formaliser une théorie, c'est, à partir du matériel intuitif présenté par la théorie, et qu'on supposera constitué en une " morphologie " T, donner un système de règles formelles engendrant une combinatoire symbolique (S) isomorphe à la morphologie (T) : l'isomorphisme (S) $\rightarrow$ (T) étant précisément induit par la correspondance qui attache à tout symbole (*s*) de (S) son " sens ", son contenu intuitif dans (T) (sa *réalisation sémantique*, diraient les logiciens). Or, peut-on raisonnablement espérer que le matériel intuitif de la théorie (T) se laisse intégralement couvrir par les expressions symboliques de (S) ? Un exemple vient immédiatement à l'esprit : celui des langues naturelles, dont les linguistes " formalistes " se sont efforcés d'axiomatiser la grammaire et la syntaxe. Là, ils ont dégagé un certain nombre de processus formels, les grammaires générative et transformationnelle, dont la validité, sur le plan d'une description formelle des phrases effectivement présentes dans le corpus - ne peut être niée. Mais, si l'on systématise ces processus formels en une axiomatique dont on poursuit aveuglément la complétion formelle, on ne tarde pas à construire des phrases d'une telle longueur et d'une telle complexité qu'elles en perdent toute intelligibilité. Je ne vois aucune raison pour laquelle un phénomène analogue ne se présenterait pas en mathématique : en extrapolant un mécanisme formel jusqu'à la limite de ses capacités génératives, on a toute chance de construire des formules tellement longues et complexes que toute possibilité d'interprétation intuitive disparaît. Les " théorèmes " ainsi obtenus seront peut-être formellement vrais, mais ils seront sémantiquement insignifiants. Ainsi pour toute théorie intuitive (T), on peut s'attendre à devoir se servir, non pas d'une, mais de plusieurs axiomatisations; chaque axiomatisation locale (S) a avec la morphologie intuitive (T) une " zone de contact " Z_S, pour laquelle elle est valide ; mais dès qu'on construit dans (S) des formules trop longues et trop compliquées, l'intelligibilité disparaît. Il se produit entre (S) et (T), à la frontière de la zone Z_S, une sorte de *décollage sémantique qui* interdit de prolonger l'isomorphisme (S) $\rightarrow$ (T) défini par le sens au-delà de Z_S. L'idée que la théorie (T) puisse être engendrée par un seul mécanisme formel (S) est *a priori* aussi invraisemblable que d'admettre que la Terre est plate, qu'on puisse couvrir une variété avec une seule carte. Le mécanisme de ce décollage sémantique mériterait d'être précisé ; plus loin nous verrons un exemple, où il intervient très brutalement, par suite d'une inadéquation du symbolisme aux propriétés sémantiques des êtres symbolisés (cas du formalisme booléien appliqué au langage ordinaire) ; dans le cas des mathématiques, il semble que le décollage sémantique n'intervienne que de manière assez floue et progressive (cas des nombres transfinis en théorie des ensembles, par exemple). L'avantage indéniable d'une formalisation locale est souvent de préciser les données de l'intuition, et, qualité indispensable, de permettre la communication entre mathématiciens. Comme tous les modes de communication - écrite ou parlée - font appel à une morphologie unidimensionnelle, il est nécessaire de coder la morphologie intuitive (T) (qui a pour support, en général, un espace multidimensionnel à un très grand nombre de dimensions) par un système formel (S) de symboles unidimensionnels. On a beaucoup glosé, ces dernières années, sur l'importance de l'axiomatisation en tant qu'instrument de systématisation et de découverte. Instrument de systématisation, certes ; de découverte, là, la chose est plus que douteuse. Il est caractéristique que, de l'immense effort de systématisation de Nicolas Bourbaki (qui n'est d'ailleurs pas une formalisation, car Bourbaki utilise une métalangue non formalisée), aucun théorème neuf de quelque importance ne soit sorti. Et si les chercheurs mathématiciens font référence à Bourbaki, ils trouvent beaucoup plus souvent leur pâture dans les exercices - où l'auteur a refoulé le matériel concret - que dans le corps déductif du texte. Il faut le dire tout net : l'axiomatisation est une recherche de spécialistes, qui n'a sa place ni dans l'enseignement secondaire ni en faculté (sauf, bien entendu, pour les professionnels désireux de se spécialiser dans l'étude des fondements). C'est pourquoi les reproches d'inconsistance adressés à la géométrie euclidienne sont en fait sans importance au niveau, qui seul importe, de la validité intuitive locale du raisonnement.

Importance " génétique " de la géométrie : le continu précède le discontinu

Les considérations précédentes nous livrent la clé du succès historique des Éléments d'Euclide. La géométrie euclidienne fut le premier exemple d'une transcription d'un processus spatial bi-ou tri-dimensionnel dans le langage unidimensionnel de l'écriture. En cela, la géométrie euclidienne ne fait qu'appliquer à une situation plus rigide, mieux déterminée, une activité déjà présente dans le langage de tous les jours. La langue usuelle a pour fonction primaire, en effet, de décrire les processus spatio-temporels qui nous entourent, processus dont la topologie transparaît dans la syntaxe des phrases qui les décrivent [1]. Dans la géométrie euclidienne, on a affaire à la même fonction du langage, mais cette fois le groupe d'équivalences jouant sur les figures est un groupe de Lie, le groupe métrique, par opposition aux groupes d'invariance plus topologique des " Gestalten " qui nous permettent de reconnaître les objets du monde extérieur décrits par un nom du langage usuel. En cela, la géométrie est un intermédiaire naturel, et peut-être irremplaçable, entre la langue usuelle, et le langage formalisé des mathématiques, langage dont l'objet se réduit au symbole, et le groupe d'équivalences à l'identité du symbole écrit avec lui-même. De ce point de vue, le stade de la pensée géométrique est peut-être un stade impossible à omettre dans le développement normal de l'activité rationnelle de l'homme. On a beaucoup trop insisté, depuis cinquante ans, sur la reconstruction du continu géométrique à partir des entiers naturels (par la théorie des coupures de Dedekind ou la complétion du corps des rationnels). Sous l'influence de traditions axiomatiques et livresques, on a vu dans le discontinu l'être premier des mathématiques. " Dieu créa les nombres entiers, et le reste est l'oeuvre de l'homme. " Cette maxime de l'algébriste Kronecker témoigne plus de son passé de banquier enrichi dans les manipulations monétaires que de sa clairvoyance philosophique. Il ne fait guère de doute que d'un point de vue psychologique (et pour moi, ontologique), le continu géométrique est l'être premier. Car avoir conscience, c'est avoir conscience du temps et de l'espace, le continu géométrique est en quelque sorte adhérent à toute pensée consciente. Mais ce continu, primitivement homogène et amorphe, se structure peu à peu, et l'outil fondamental de cette structuration est l'action du groupe métrique, qui seule permet de plaquer le discontinu, l'opératoire sur l'étendue homogène. Mais il s'agit là d'une opération déjà très élaborée ; auparavant, on a toutes les propriétés topologiques du continu, propriétés que la mathématique moderne (la vraie), a dû retrouver par un vrai retour aux sources, en s'affranchissant de la tutelle du groupe métrique. Une telle théorie, n'étant plus métrique, ni quantitative, est fondamentalement qualitative, et ne peut s'appuyer que sur le symbolisme discret dans un langage semi-formalisé. Mais les invariants topologiques, plus profonds, apparaissent plus difficilement à la conscience que les invariants métriques, plus superficiels. De là vient que le passage de la pensée usuelle à la pensée formalisée se fait naturellement par la pensée géométrique. Il en a été ainsi pour l'histoire de la pensée humaine, et, pour peu qu'on croie à la loi de récapitulation de Haeckel, selon laquelle l'individu dans son développement, passe par toutes les étapes de l'espèce, il devrait en être ainsi du développement normal de la pensée rationnelle.

La théorie des ensembles

J'en viens maintenant au premier point, la théorie des ensembles. C'est là le point essentiel que développent les thuriféraires des mathématiques " modernes ". Certains affirment que l'emploi de la théorie des ensembles permet de renouveler entièrement l'enseignement des mathématiques, et que, grâce à ce renouveau, les élèves les plus moyens pourront accéder à la connaissance des mathématiques du programme. Est-il besoin de le dire, c'est là pure illusion. Tant qu'il s'agit de manier les évidences de la théorie naïve des ensembles, alors, certes, tout un chacun peut s'en tirer. Mais ce ne sont là ni des mathématiques, ni même de la logique. Dès qu'on entre en contact avec les vraies mathématiques (i.e., les nombres réels, la géométrie, les fonctions), alors on redécouvre qu'il n'y a pas de voie royale et que seule une minorité d'élèves sera capable d'assimiler pleinement ces notions.

L'optimisme excessif engendré par l'usage des symboles de la théorie des Ensembles repose, à tout prendre, sur une erreur philosophique. On a cru, en enseignant l'usage des symboles $\in$ $\subset$ $\cup$ $\cap$ expliciter les mécanismes sous-jacents à tout raisonnement, à toute déduction. L'homme du XXe siècle a redécouvert avec enthousiasme les syllogismes en Darapti et en Celarent qu'enseignait la Scolastique du Moyen-Age. Mais avec quelle dégradation ! Quand Boole au XIXe siècle écrivit son traité célèbre sur l'algèbre qui porte son nom, il n'hésita pas à intituler son traité *: The laws of thought.* La croyance naïve que toute déduction trouvait son modèle dans une manipulation ensembliste a été partagée par des philosophes modernes, comme les néo-positivistes. Aristote, pas plus que les Scolasticiens médiévaux, ne partageait cette illusion. La logique aristotélicienne reposait, comme J. Vuillemin l'a rappelé [2], sur une ontologie de la substance très riche et complexe. Les protagonistes modernes de la théorie des ensembles devraient se rendre compte que cette théorie est insuffisante à rendre compte des démarches déductives les plus élémentaires de la pensée usuelle. On me permettra de présenter ici une illustration de ce fait.

Les copules ou et et.

On enseigne, classiquement, que l'équivalent grammatical du symbole $\cup$ (réunion) est *ou,* celui du symbole $\cap$ (intersection) est *et.* Appliquons cette règle à deux phrases élémentaires dont les sujets sont des noms propres :

i) Pierre ou Jean viendra.

ii) Pierre et Jean viendront.

La première phrase i) peut se paraphraser en : *Pierre viendra ou Jean viendra*. Il y a alors parfait accord du symbole ou avec la réunion logique $\cup$, à condition de faire porter la copule ou, non sur les sujets, mais sur le noeud verbal *viendra.*

La seconde phrase ii) peut également se paraphraser en Pierre viendra et Jean viendra. Mais, ce faisant, on se rend compte que la phrase ii) est subtilement ambiguë ; très fréquemment et de manière implicite (dans le " présupposé" de la phrase), Pierre et Jean viendront signifie : Pierre et Jean viendront *ensemble.* Alors que l'expression : *Pierre ou Jean* à elle seule n'a aucune réalisation sémantique, il est possible d'interpréter : *Pierre et Jean* comme l'être constitué du couple des individus Pierre et Jean supposés spatialement voisins.

Ce fait explique la différence de traitement grammatical entre les verbes de i) et ii), la copule et exige le pluriel parce qu'elle présuppose une certaine contiguïté spatiale des sujets.

Considérons maintenant des phrases où les copules portent cette fois sur des qualités (adjectifs).

1) Pierre est petit ou intelligent

2) Pierre est petit et intelligent.

3) Jean est brun ou châtain.

4) Jean est brun et châtain.

On observera que les phrases 2) et 3) sont sémantiquement acceptables, alors que 1) et 4) sont douteuses ou inacceptables. On extrapolera l'ensemble de ces remarques par le principe suivant :

Principe d'exclusion

. Si X et Y sont deux qualités, les phrases

A est X ou Y

A est X et Y ne peuvent être toutes deux sémantiquement acceptables.

Lorsque X *ou* Y peut se prédiquer d'un sujet, on dira que X et Y sont des qualités d'un même *champ sémantique* [par exemple : *brun, châtain* pour les phrases 3) et 4)]. En ce cas *X et Y* n'a pas de sens, en principe. Cette règle admet néanmoins une exception notoire : c'est le cas où " et " désigne, non l'intersection logique mais la contiguïté spatiale. Ainsi, on peut dire à la fois

5) Ce drapeau est blanc ou bleu.

6) Ce drapeau est blanc et bleu.

Le fait que, dans 6), la copule *et* n'a pas la valeur $\cap$ se voit en ce que l'implication

Ce drapeau est blanc et bleu $\Rightarrow$ *Ce drapeau est blanc* est fausse.

En fait, les conditions pour que la qualité *X ou Y* ait un sens, sont extrêmement restrictives ; ainsi : *Jean est blond ou châtain* est nettement plus acceptable que *Jean est blond ou brun,* parce que, dans le champ sémantique des couleurs de cheveux, blond et châtain sont contigus, alors que brun et blond ne le sont pas. La copule *ou*, géométriquement parlant, a pour effet de *creuser un seuil* entre les deux bassins d'attraction définis par les adjectifs blond et châtain. Lorsque la distance sémantique entre deux qualités *X, Y* est trop grande - en particulier lorsque ces qualités appartiennent à des champs sémantiques disjoints, comme une qualité physique et une qualité morale alors l'expression *X ou Y* perd tout sens.

Ce fait, bien qu'assez évident, semble avoir complètement échappé aux auteurs de manuels de théorie des ensembles. Ils viennent proposer aux élèves des exercices d'algèbre booléienne où il est question de " cubes larges ou bleus " de " Parisiens chauves ou riches ". Ces exercices sont non seulement bizarres et inutiles, ils pourraient, si on persistait dans cette voie, se révéler nuisibles à l'équilibre intellectuel des enfants. C'est en effet une contrainte fondamentale de la pensée juste que d'éviter le mélange de champs sémantiques disjoints ; ce mélange a un nom : cela s'appelle le délire. En voulant attacher un sens à toutes les expressions construites, en langue ordinaire, par le formalisme booléien, le logicien procède à une reconstruction de l'univers à la fois *fantomatique et délirante.*

Tout ceci nous montre les limites étroites du formalisme ensembliste pour rendre compte de la déduction usuelle. Le raisonnement quotidien fait appel à des mécanismes psychiques profonds, comme l'analogie, qui ne sauraient se réduire à des manipulations ensemblistes : ce qui joue un rôle, en pareil cas, c'est l'isomorphisme d'organisation entre champs sémantiques qu'on associe homologiquement. En fait, le schéma booléien ne s'applique guère sans bavure qu'au cas décrit par les inclusions spatiales de sous-ensembles de l'espace, comme dans les diagrammes de Venn. Or, en pareil cas, nul ne prendra la peine d'expliciter le raisonnement sous forme syllogistique : le renard, qui sait que, si les poules sont dans le poulailler, et le poulailler dans la ferme, les poules sont dans la ferme, fait-il de la théorie des ensembles ? La force contraignante du schéma logique provient de celle de l'inclusion spatiale et non l'inverse. Tout homme fait de la théorie des ensembles, dès qu'il existe, tout comme M. Jourdain faisait de la prose sans le savoir. On dira qu'il vaut mieux le faire en le sachant : le gain, si gain il y a, est purement rhétorique. C'est dans la mesure seulement où la technique de la démonstration mathématique est une rhétorique qu'il y a intérêt à procéder par des formalisations locales - qui sont en fait des " spatialisations " locales - , et à leur appliquer le formalisme des ensembles.

Ceci nous montre l'attitude qu'une pédagogie raisonnable devrait prendre à l'égard des ensembles. On fera de la théorie naïve et concrète des ensembles à l'Ecole maternelle, où c'est sa place naturelle. On apprendra l'usage des symboles $\in \subset \cup \cap$, vers la sixième, des quantificateurs en troisième, et on n'en parlera jamais plus ailleurs.

Il n'est pas certain que même en mathématique pure, toute déduction puisse avoir un modèle ensembliste. Les paradoxes mal domptés qui sapent la théorie formelle des ensembles sont là pour rappeler au mathématicien quels dangers le guettent dans l'usage inconsidéré de ces symboles d'apparence si innocente. Peut-être que, même en mathématique, la qualité subsiste, et résiste à toute réduction ensembliste. Le vieil espoir bourbakiste, de voir les structures mathématiques sortir naturellement de la hiérarchie des ensembles, de leurs sous-ensembles, et de leur combinatoire, n'est sans doute qu'une chimère. Nul ne peut raisonnablement échapper à l'impression que les structures mathématiques importantes (structures algébriques, structures topologiques) apparaissent comme des données fondamentalement imposées par le monde extérieur, et que leur irrationnelle diversité trouve sa seule justification dans la réalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Thom, *Topologie et Linguistique.* Volume jubilé de Rham, Springer.

[2) J. Vuillemin, *De la logique à la théologie*. Flammarion, Paris, 1967.

[3] G. Kreisel, The formalist-positivist doctrine of mathematical precision in the light of experience, *L'Age de la science*, vol. III, n° 1, janvier-mars 1970, p. 17-46.

APPENDICE

Sur la notion de champ sémantique et le " principe d'exclusion " *dans un modèle géométrique de la signification*

L'usage des copules " ou " et " et " en langue ordinaire pose des problèmes très délicats ; l'équivalence habituelle ou = $\cup$, et = $\cap$ admet de nombreux contre-exemples ; le plus immédiat d'entre eux est celui-ci : si on considère l'ensemble constitué du chien Médor et de son maître Jean, on dira : Médor *et* Jean et non Médor *ou* Jean. Une analyse fondée sur un modèle géométrique de la signification - inspirée du modèle de Zeeman des activités psychiques permet peut-être d'y voir un peu plus clair.

Le modèle géométrique de la signification

Dans ce modèle, on considère que la totalité des états psychiques d'un individu peut être représentée par les points d'un espace $U = R^N$, espace euclidien à un nombre énorme de dimensions. A tout stimulus sensoriel s affectant l'individu correspond une certaine transformation de son état psychique qu'on représentera par un endomorphisme continu

$g_s : U \rightarrow U$. Un stimulus (s) sera dit " significatif " pour l'individu, si l'endomorphisme g_s est un *idempotent* i.e. a la propriété que g_s o $g_s = g_s$. En effet, dire qu'on a " compris " une situation, c'est dire qu'un examen ultérieur de cette situation ne modifie plus notre état mental (" comprendre, c'est s'immuniser ") .

Définition d'un champ sémantique

Si on suppose alors l'endomorphisme g_s différentiable, l'ensemble image g(U) constitue une sous-variété de U, sur laquelle g_s est localement un projecteur. Un tel sous-espace g(U) constitue - en principe - un " champ sémantique ", un univers mental de signification. Le fait que ce sous-ensemble est connexe, manifeste une des exigences fondamentales du modèle, à savoir que *l'on ne peut penser qu'une seule chose à la fois* .

Or c'est là l'un des paradoxes mis en jeu par les copules : *ou, et,* qu'elles nous obligent à penser simultanément au moins deux objets. Ces copules posent donc, fondamentalement, le même problème que celui de la prédication : par quel processus l'esprit arrive-t-il à lier en une forme unique une agrégation d'objets distincts ? C'est là le problème classique des *mixtes* - cf. le " Sophiste " de Platon - que la logique moderne a cru pouvoir écarter à la faveur d'une reconstruction ensembliste de l'univers, reconstruction dont nous avons vu le caractère irréel et délirant.

La copule " et "

Examinons d'abord le cas de la copule " *et* ", sensiblement plus simple que celui de *" ou* ". Considérons le cas où *" et "* lie deux qualités (représentées grammaticalement par des adjectifs). Dans certains cas, on peut purement et simplement, sans affecter le sens, faire l'ellipse de *" et "* : exemples :

Pierre est grand et riche.

Pierre est grand, riche.

Si donc, dans la phrase : *A est X et Y* on peut faire l'ellipse de *" et " A est X, Y*, c'est que l'effet sémantique de *X et Y* équivaut pratiquement à la composition des endomorphismes : g_Y o g_X ;

par ailleurs, on peut, sans affecter le sens, permuter les deux qualificatifs ; donc les " projecteurs " g_Y et g_X commutent, et g_Y o g_X est encore un idempotent. Ceci implique que les champs sémantiques $g_X(U)$ et $g_Y(U)$ se coupent transversalement dans U. On exprimera cette situation en disant que les champs sémantiques $g_X(U)$ et $g_Y(U)$ sont *indépendants.* Intuitivement, ceci correspond au fait que les qualités X et Y appartiennent à des aspects indépendants de la réalité, comme une qualité physique et une qualité morale.

Il peut cependant arriver que la copule *et* lie deux qualités de même nature, comme dans :

Ce drapeau est bleu et blanc.

En ce cas, on ne peut plus supprimer la copule, et sans la copule, il n'y a pas commutation des qualités.

Pour comprendre cette situation, il est nécessaire de décrire de manière plus fine les endomorphismes g_X correspondant à une qualité X. Supposons, pour fixer les idées, que X soit une couleur, bleu par exemple. Alors l'endomorphisme g_X se factorise en un produit de la forme h_X o C, où C est un projecteur de U dont l'espace image C(U) est l'espace tridimensionnel des impressions de couleurs ; h_X n'est défini que sur une portion de cet espace C(U) l'ensemble *Bl* des points de C(U) qu'on peut usuellement considérer comme donnant l'impression de bleu ; l'image h_X o B doit être alors considérée comme un point du domaine *Bl*, l'image de bleu qui apparaît dans l'esprit lorsqu'on entend le mot bleu. Par exemple, l'expression : *La grenouille bleue,* provoque un certain malaise sémantique. C'est que l'endomorphisme g correspondant au substantif " grenouille " a pour image le champ sémantique représentant l'espace tridimensionnel R^3 usuel, et, dans cet espace, on a l'accident local défini par la forme spatiale d'une grenouille. En appliquant g_{bleu} à cette image, on lui applique d'abord le projecteur C (couleur); or, l'image C(grenouille) dans l'espace des couleurs est contenue, soit dans le bassin du vert, soit dans le bassin du " roux "; en tout cas, pas dans le domaine Bl de l'opérateur g_{bleu} . De là vient que la composition cesse d'être définie, d'où le sentiment de malaise.

Les endomorphismes correspondant à deux couleurs, bleu, blanc par exemple, se factorisent par suite en $g_{bleu} = h_{bleu}$ o C ; $g_{blanc} = h_{blanc}$ o C ; ils appartiennent tous deux au champ sémantique des couleurs défini par l'endomorphisme C. L'expression : *ce drapeau est bleu et blanc* s'interprète alors ainsi : l'esprit peut appliquer " simultanément " les opérateurs h_{bleu} et h_{blanc} à l'image par C de " ce drapeau ". La phrase exprime alors que cette image, en sa totalité, est couverte par les domaines de h_{bleu} et h_{blanc} . Ici les " attracteurs " finaux de h_{bleu} et h_{blanc} sont disjoints et ne se rencontrent plus ; ceci explique que l'implication : ce drapeau est bleu et blanc $\Rightarrow$ ce drapeau est blanc soit fausse (parce que h_{blanc} ne recouvre pas la totalité de l'image par C de ce drapeau).

En résumé :

Si la phrase : A est X et Y, a un sens, deux cas sont possibles :

i) La copule *et* peut s'omettre sans affecter le sens : alors X et Y sont des qualités de champs sémantiques indépendants.

ii) La copule *et* ne peut s'omettre : alors A est un concept "étendu" (soit spatialement dans l'espace ordinaire, soit dans un espace sémantique approprié) ; les qualités X et Y appartiennent à un même champ sémantique défini par un projecteur C : $g_X = h_X$ o C, $g_Y = h_Y$ o C, C peut être discontinu sur l'image étendue de g_A, et l'image C(A) est continue dans la réunion des domaines de h_X et h_Y.

La copule " ou "

Considérons maintenant la copule *ou*. Une phrase telle que : A est X ou Y, où X et Y sont deux qualités, ne peut avoir du sens que si X et Y sont deux qualités d'un même champ sémantique.

En effet, si l'expression X ou Y a du sens, elle est définie par un endomorphisme idempotent g dont l'image ne peut être que la réunion topologique des images g_X (U), g_Y (U) ; mais, si X *et* Y a du sens, selon le cas i) ci-dessus, alors g_X (U) et g_Y (U) sont des variétés qui se coupent transversalement. Par suite $g_X (U) \cup g_Y (U)$ n'est pas une variété lisse, et ne peut être l'image d'un projecteur. Donc, si X *et* Y a du sens (cas i), X *ou* Y ne peut avoir de sens.

La seule possibilité que X *ou* Y ait un sens est donc que l'intersection des variétés images g_X (U) et g_Y (U) soit vide. Ceci correspond au cas où les qualités X, Y, s'excluent, donc elles appartiennent au même champ sémantique .

Une phrase assertive : A est X ou Y ne peut guère avoir de sens que si X et Y sont deux qualités " contiguës " dans leur espace sémantique commun : Jean est brun ou châtain ; ceci signifie que la couleur des cheveux de Jean est dans l'intersection des domaines de l'espace sémantique des couleurs de cheveux définis par les adjectifs brun et châtain. La copule " ou " a, dans cet espace, un effet sémantique semblable à celui de la préposition " entre " dans l'espace usuel : elle " creuse ", stabilise un seuil entre les bassins des deux attracteurs Y, Y.

Ou et l'interrogation

Lorsque X, Y ne sont pas des qualités contiguës, l'expression X *ou* Y n'a de sens que dans des phrases non assertives, interrogatives ou dubitatives. En effet, pour stabiliser un seuil entre deux bassins éloignés, il est nécessaire d' " exciter " l'expression, d'élever son " potentiel sémantique ". Par exemple, la phrase assertive :

La balle que tu as perdue ce matin est rouge ou bleue

a un air bizarre. Sous forme interrogative :

La balle que tu as perdue ce matin, est-elle rouge ou bleue ?

elle, est parfaitement normale.

On citera également un exemple de B. Russell (Signification et Vérité) Une logicienne, récemment accouchée, à la question de son mari : est-ce un garçon ou une fille ? répondait : Oui. Si la question est normale, la réponse, elle, ne l'est pas.

La transformation interrogative d'une phrase - en stabilisant X *ou* Y a pour effet de provoquer chez l'auditeur un état sémantiquement instable, une " excitation ", dont l'exutoire naturel est de donner réponse à la question. Lorsque X, Y sont des qualités d'espaces sémantiques indépendants, l'expression X ou Y n'a jamais de sens, même pas dans des phrases interrogatives : Pierre est-il petit ou intelligent ? est bizarre.

On voit donc que, contrairement à la croyance courante, dans l'espace sémantique considéré, *et* signifie la réunion des domaines, *ou* leur intersection. De ce point de vue, il n'y a pas de différence entre l'espace usuel R^3 et les espaces de qualités sémantiques. (Dans une théorie " génétique " de la formation mentale, on peut d'ailleurs admettre que les divers espaces sémantiques sont issus de la représentation de l'espace R^3 usuel par un processus de différentiation, d'exfoliation successive .)

Alternative inclusive et alternative exclusive

On distingue classiquement, pour les emplois de *ou*, l'alternative inclusive (latin *vel*), et l'alternative exclusive (latin *aut*). En fait, il faut bien se rendre compte que, ni en français, ni en latin n'existe une vraie alternative inclusive. L'emploi classique de *vel* correspond mentalement à un processus d'approximations successives, le second terme de l'alternative étant présenté comme une meilleure approximation que le premier : *Melius vel optime* (Cicéron) : Mieux ou plutôt le mieux. C'est là un emploi très comparable à celui de notre phrase (3) : Jean est brun ou châtain, où là aussi, il n'y a pas " commutabilité " stricte des qualificatifs (châtain étant présenté comme une meilleure approximation que brun de la teinte des cheveux de Jean).

En résumé, l'expression X *ou* Y où X et Y sont des qualités, n'a de sens que si X et Y appartiennent à un même champ sémantique. X *ou* Y ne peut apparaître dans une phrase assertive que si Y et Y sont des qualités contiguës dans ce champ sémantique ; dans une phrase interrogative, au contraire, X, Y peuvent être des qualités arbitraires du même champ.

Le " principe d'exclusion " : X *ou* Y, X *et* Y n'ont jamais de sens tous deux simultanément, admet une exception : celle définie par le cas où le sujet est un concept spatialement étendu; et a alors la valeur de la contiguïté spatiale.

Le modèle dynamique des mixtes

Nous avons dit plus haut que, sur l'espace sémantique considéré, *ou* a pour effet de stabiliser le seuil entre les bassins d'attraction de X et Y ; ce qui revient à prendre l'intersection des bassins ; *et*, au contraire, revient à former la réunion topologique des bassins. Une telle affirmation ne doit pas être prise au pied de la lettre. En effet, l'organisation d'un espace sémantique en bassins d'attraction est contrôlée, en général, par un mécanisme dynamique qui admet un modèle algébrique relativement simple (par exemple, les minima d'un potentiel). La formation d'un " mixte " tel que X ou Y, ou X et Y, correspond alors à un processus dynamique, qu'on peut décrire comme l'excitation simultanée et résonante d'oscillateurs associés aux minima du potentiel X et Y. Pour emprunter une analogie à la phonétique, si l'opposition entre X et Y est définie par un " trait pertinent ", le mixte X et Y correspond à la " neutralisation " de ce trait pertinent. Deux qualités d'un champ sémantique sont en fait toujours contiguës, mais la hauteur du seuil qui sépare les bassins définit la distance sémantique entre ces qualités.

Donnons ici un modèle géométrique unidimensionnel de cette situation. Supposons que notre espace sémantique soit l'axe Ox ; sur cet axe, nous avons un potentiel sémantique défini par une courbe à deux minima X, Y (X = - 1 ; Y = + 1), du type de la fonction $V == x^4 – 2x^2$ (fig.

1). Imaginons qu'un point matériel *m* se meut dans la cuvette de potentiel définie par la fonction V. Si l'énergie cinétique du point au minimum est inférieure à la hauteur du seuil, le point reste prisonnier dans l'un des bassins X, ou Y ; augmentons cette énergie : le point peut alors atteindre et même franchir le seuil entre les deux bassins ; mais, si l'énergie cinétique h excède à peine celle nécessaire à passer par-dessus le seuil, la vitesse du mobile au voisinage du seuil sera très faible, en sorte que le point va rester un temps considérable au voisinage du seuil (beaucoup plus longtemps que le temps nécessaire à osciller dans les cuvettes X et Y) ; thermodynamiquement, ceci correspond à la stabilisation du seuil entre X et Y. Mais si on élève encore l'énergie cinétique, cet effet tend à disparaître, et le mobile a tendance à remplir " ergodiquement " la réunion des cuvettes de potentiel X et Y. La première situation, d'énergie faible, correspond au " mixte " X ou Y, la seconde, de grande énergie, au mixte X et Y. Si ce modèle est correct, on peut donc passer de manière continue du mixte X *ou* Y au mixte X *et* Y, en " excitant " l'oscillateur.

Ce modèle pourrait peut-être rendre compte du fait, a priori surprenant pour notre mode de pensée façonné par des millénaires de logique, qu'il existe des langues où les emplois de *ou, et* sont pris en charge par une seule et même conjonction, la distinction ultérieure entre *ou* et *et* se faisant par adjonction d'adverbes du type : un seul, resp. tous deux. (Une langue samoyède, cf.

R. Jacobson, Essais de Linguistique Générale, p. 82, Éditions de Minuit, Paris).

Nous conclurons que l'usage habituel des copules *ou, et* n'a qu'un rapport très lointain - et délicat, parce que susceptible d'être inversé - avec les opérations $\cup$, $\cap$ de la logique ou de la topologie. Seuls pourront s'en étonner les neurophysiologistes assez naïfs pour croire que la cervelle humaine n'est qu'un ensemble de circuits neuroniques assimilables aux circuits logiques élémentaires des ordinateurs électroniques, circuits qui réalisent en code binaire les opérations $\cup$ et $\cap$.

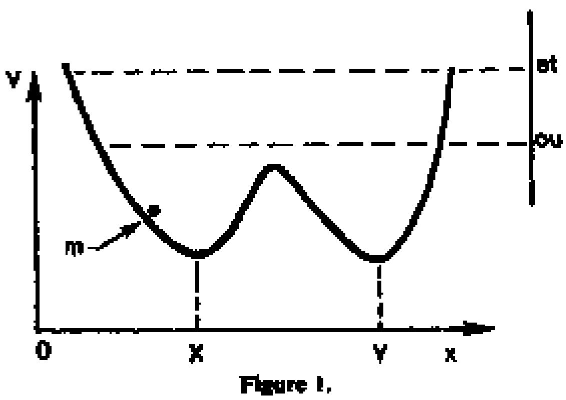

Figure 1.