

Logiques, histoire de la logique, logique combinatoire, logique modale,

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedie/page/8118#t425700>

logique

Ensemble des principes de raisonnement visant à constituer un système scientifique.

On considère aujourd'hui encore volontiers que l'histoire de la logique se décompose en deux parties principales séparées par une coupure radicale : l'ancienne et la nouvelle logique (pour reprendre le titre significatif d'un opuscule de Carnap), la coupure se situant aux environs de 1850, au moment où la discipline échappe complètement à la philosophie pour devenir une science mathématique. Cette bipartition commode ne va pas sans quelques difficultés, en particulier en ce qui concerne le cas de Leibniz, qui, s'il appartient du point de vue chronologique à la logique ancienne, n'en doit pas moins être considéré en un certain sens comme le père de la logique moderne (encore qu'il s'agisse en réalité beaucoup plus d'anticipation que de paternité effective), et elle incite à ignorer la modernité évidente des logiques aristotélicienne et stoïcienne ou de certaines contributions scolastiques.

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedie/page/8119>

logique (suite)

Peut-être est-il finalement plus judicieux de segmenter, comme le fait J. M. Bochenski, le développement de la logique en fonction de quelques grandes périodes novatrices (auxquelles on peut rattacher de part et d'autre des préliminaires et des prolongements), séparées par des périodes de mise en sommeil relatif ou complet. Les époques véritablement créatrices sont : dans l'Antiquité, les ^{iv}^e et ⁱⁱⁱ^e s. av. J.-C. ; au Moyen Âge, les ^{xiii}^e et ^{xiv}^e s. ; à l'époque moderne, la période qui va du milieu du ^{xix}^e s. à nos jours. D'où un découpage de l'histoire de la logique occidentale (il n'est malheureusement pas possible de parler ici d'une autre logique importante : la logique indienne) en cinq grandes périodes, deux périodes de stagnation venant s'intercaler entre trois périodes de création.

L'Antiquité

Aristote*

On fait commencer traditionnellement l'histoire de la logique ancienne avec Aristote. Cela ne signifie évidemment pas qu'il a fallu attendre Aristote pour que la logique soit utilisée, mais simplement qu'Aristote a été le premier à éprouver le besoin d'explicitier et de recenser systématiquement un certain nombre de principes et de procédures logiques que l'on utilisait jusque-là sans les mentionner.

Théophraste (v. 372 - 287 av. J.-C.)

Les œuvres de cet élève d'Aristote étant pour la plupart perdues, nous ne disposons guère à son sujet que de renseignements indirects, dus en particulier à Alexandre d'Aphrodisias. Ce que nous savons de lui permet de se rendre compte que son apport personnel a consisté essentiellement à développer et à corriger sur certains points la doctrine de son maître. Une de ses initiatives a été d'ajouter aux modes de la première figure du syllogisme assertorique les cinq modes que l'on appellera plus tard « modes indirects » et qui se distinguent des quatre modes « parfaits » en ce que, dans la conclusion, c'est le petit terme qui est prédiqué du grand. Mais les contributions les plus importantes de Théophraste concernent la logique modale, où, d'après Bochenski, on lui doit deux innovations importantes : (1) l'interprétation du contingent, identifié avec le possible, non plus au sens bilatéral où l'avait pris Aristote (non-impossible et non-nécessaire), mais au sens unilatéral (non-impossible) ; (2) l'affirmation et l'utilisation conséquente du principe selon lequel la conclusion suit toujours la prémisses la plus faible (principe qui était respecté dans la syllogistique assertorique, mais non dans la syllogistique modale d'Aristote). Il est permis de considérer également que ses recherches concernant les syllogismes « analogiques » (hypothétiques) anticipent jusqu'à un certain point le calcul des propositions stoïcien.

Mégariques et stoïciens*

À bien des égards, la logique de l'Antiquité atteint son apogée avec ce qu'on appelle la *logique des stoïciens* et que l'on devrait sans doute plutôt appeler la *logique mégarico-stoïcienne*, parce que les stoïciens en ont emprunté l'essentiel à une école philosophique antérieure, contemporaine et rivale d'Aristote. L'école de Mégare a été fondée par Euclide de Mégare (v. 450 - v. 380 av. J.-C.), un disciple de Socrate*. Parmi les philosophes qui en ont fait partie, trois méritent une mention spéciale : Eubulide, Diodore et Philon le Mégarique. Eubulide est l'inventeur de paradoxes célèbres, dont le plus fameux est celui du *menteur*. Un homme dit qu'il ment : ce qu'il dit est-il vrai ou faux ? Les mégariques semblent avoir été, d'une manière générale, des maîtres dans l'art d'embarrasser l'adversaire par des arguments captieux. Mais leur contribution ne se borne pas à cet aspect éristique et négatif. Diodore Cronos († 296 av. J.-C.) et son élève Philon se sont opposés sur un point qui semble avoir été un objet de querelles incessantes parmi les mégariques et les stoïciens : ce que nous appellerions la « table de vérité de l'implication », c'est-à-dire la question de savoir quelle valeur de vérité on doit attribuer à une proposition de la forme « si A, alors B » pour chacune des combinaisons de valeurs de vérité possibles des deux propositions qui la composent. La conception de Philon correspond à celle du calcul des propositions modernes, c'est-à-dire à ce que nous appelons depuis Russell l'« implication matérielle » : la proposition composée est fausse uniquement si, des deux propositions composantes, la première est vraie et la seconde fausse ; elle est vraie dans tous les autres cas. La conception diodoréenne est moins claire : elle consiste, d'après Sextus Empiricus, à dire qu'une implication est vraie si elle n'a jamais pu ni ne peut avoir un antécédent vrai et un conséquent faux. Cela semble vouloir dire qu'une implication est valide au sens diodoréen si elle est valide dans toutes les circonstances possibles au sens philonien. Par exemple, la proposition « Si c'est le jour, il fait clair » est vraie au sens diodoréen si, et seulement si, pour toutes les valeurs de *t*, la forme propositionnelle « Si c'est le jour au temps *t*, alors il fait clair au temps *t* » est une implication philonienne vraie. Sextus Empiricus (ii^e-iii^e s.) mentionne deux autres interprétations proposées par des logiciens de l'école mégarico-stoïcienne, dont l'une correspond à ce que nous appelons l'« implication stricte » : une proposition de la forme « si A, alors B » est vraie si, et seulement si, la négation de B est logiquement incompatible avec A.

Le logicien le plus original et le plus fécond de l'école stoïcienne a été indiscutablement Chrysippe (281-205 av. J.-C.), qui a bénéficié dans l'Antiquité d'une réputation comparable et quelquefois supérieure à celle d'Aristote lui-même. L'idée que l'on peut se faire de la logique stoïcienne (essentiellement d'après les fragments cités et les commentaires — souvent peu sympathiques — fournis par des auteurs postérieurs) est celle d'une logique déjà très raffinée et formalisée, tout à fait différente de celle qui avait été construite par Aristote. Il s'agit d'une logique des propositions, alors que la syllogistique était une logique des propriétés (des classes) ou des termes : les stoïciens utilisent des variables qui prennent comme valeurs des propositions, alors que les variables aristotéliennes étaient des variables d'attribut ou de classe. C'est, en outre, une logique qui énonce des schémas d'inférence valide, alors que celle d'Aristote s'exprime habituellement dans des formes propositionnelles implicatives. La négation et les liaisons interpropositionnelles usuelles (*et*, *ou*, *si... alors*, etc.) sont interprétées, comme nous le faisons aujourd'hui, en termes de « fonctions de vérité », et certaines possibilités de définition des connecteurs propositionnels les uns par les autres sont clairement reconnues. Les inférences sont bien distinguées des implications correspondantes.

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedia/page/8120>

logique (suite)

Une importance particulière doit être accordée à la sémantique des stoïciens, qui présente des analogies importantes avec celle d'auteurs comme Frege et Husserl*. Cette sémantique se fonde sur une distinction fondamentale entre trois éléments : deux éléments « corporels », le signifiant linguistique, c'est-à-dire le signe parlé ou écrit, par exemple le nom « Socrate », et l'objet, désigné par le signe, en l'occurrence l'individu Socrate ; et un élément « incorporel », le signifié (*lekton*), c'est-à-dire la signification du signe, qui doit être distinguée à la fois de la chose dénotée et de la représentation mentale qui accompagne éventuellement le signe. Dans la conception des stoïciens, c'est sur des *lekta*, et non pas sur les expressions linguistiques auxquelles ils correspondent, que porte la logique.

Les *lekta* font l'objet d'une classification détaillée. Ils se divisent d'abord en déficients et complets. Les déficients sont exprimés par des noms propres et communs ou par des verbes ; les complets par des phrases entières. Au nombre des *lekta* complets figurent donc, à côté des propositions proprement dites, les questions, les ordres, les souhaits, les prières, etc. La logique ne s'intéresse évidemment qu'aux propositions, qui sont des *lekta* complets susceptibles d'être dits vrais ou faux. Une proposition au sens des stoïciens est la signification d'une phrase déclarative. Les propositions se divisent à leur tour en simples et composées, une distinction qui correspond assez bien à celle que nous faisons aujourd'hui entre les propositions « atomiques » et les propositions « moléculaires ». Une proposition simple est une proposition qui ne comporte aucun connecteur binaire (la négation d'une proposition simple est considérée encore comme une proposition simple). Une proposition composée relie deux propositions plus simples à l'aide d'un connecteur. À côté de connecteurs proprement dits comme l'implication, la conjonction et la disjonction, les stoïciens semblent avoir considéré également des liaisons interpropositionnelles non extensionnelles — c'est-à-dire caractérisées par le fait que la proposition composée n'est pas une fonction de vérité des propositions composantes — comme, par exemple, les liaisons causales ; mais, comme il se doit, ces dernières n'interviennent pas dans leurs travaux de logique proprement dite.

En ce qui concerne la négation, la logique stoïcienne manifeste un souci d'exactitude tout à fait remarquable, insistant notamment sur la nécessité de former la négation d'une proposition en utilisant un signe de négation préfixe, qui fasse reconnaître clairement que la négation porte sur l'ensemble de la proposition. La disjonction utilisée par les stoïciens est la disjonction exclusive, la proposition disjonctive « ou p ou q » n'étant vraie que lorsqu'une et une seule des deux propositions p et q est vraie. Mais ils connaissent également la disjonction inclusive : « Socrate se promène ou

Socrate discute. » Une recommandation de Chrysippe à propos des formules des devins montre qu'il savait comment exprimer l'implication matérielle à l'aide de la négation et de la conjonction.

Comme la syllogistique aristotélicienne, la logique des propositions stoïcienne est présentée sous forme de théorie déductive. Les éléments en sont non pas des propositions, mais des suites de propositions représentant des inférences valides. Les schémas d'inférence reconnus sont cinq schémas primitifs utilisés comme « axiomes » et tous ceux qui peuvent être ramenés à ceux-là à l'aide de certaines règles bien définies. Les cinq formes d'inférence fondamentales sont formulées de la façon suivante (les nombres ordinaux représentent des propositions) :

- I. Si le premier, alors le second, or le premier, donc le second ;
- II. Si le premier, alors le second, or pas le second, donc pas le premier ;
- III. Pas à la fois le premier et le second, or le premier, donc pas le second ;
- IV. Ou le premier ou le second, or le premier, donc pas le second ;
- V. Ou le premier ou le second, or pas le second, donc le premier.

À partir des cinq indémontrés ci-dessus, les stoïciens effectuaient la démonstration d'un grand nombre de raisonnements en utilisant quatre métarègles, dont nous ne connaissons que deux, la première et la troisième. La première était : « Si de deux propositions on peut déduire une troisième, alors l'une ou l'autre des deux premières avec la négation de la troisième permet de déduire la négation de la proposition restante. » Et la troisième : « Si de deux propositions on peut déduire une troisième, et s'il y a des propositions dont une des prémisses peut être déduite, alors l'autre prémisses en conjonction avec les propositions en question permet de déduire la conclusion. » Les stoïciens semblent avoir considéré que leur système était complet, c'est-à-dire que toute inférence valide de la logique des propositions pouvait être réduite en dernière analyse à une chaîne d'inférences appartenant aux cinq types primitifs. Comme nous ne connaissons pas toutes les métarègles dont ils se servaient, il ne nous est pas possible de dire si cette prétention était ou non justifiée.

Parmi les arguments mentionnés comme conséquences des axiomes, on peut citer les deux suivants, dont la démonstration ne nous est pas parvenue :

Si le premier, alors le second, si le premier, alors pas le second ; donc pas le premier.

Ou le premier ou le second ou le troisième, pas le premier, pas le second ; donc le troisième.

Du deuxième, Chrysippe disait qu'il est accessible même à un chien (lorsqu'il suit une trace et doit choisir entre trois chemins différents).

La fin de l'Antiquité

L'histoire de la logique ancienne après Chrysippe ne comporte pas de nom qui puisse être mis sur le même plan que le sien ou celui d'Aristote. C'est la période des manuels et des commentaires, qui se caractérise à la fois par le manque d'invention et le syncrétisme. Parmi les auteurs que l'on peut créditer de quelque contribution réellement novatrice, il faut citer Apulée et Galien (ii^e s. de notre ère), Porphyre (fin du iii^e s.) et Boèce (v^e-vi^e s.) ; parmi les commentateurs, Alexandre d'Aphrodisias, un philosophe péripatéticien (ii^e-iii^e s.) dont le commentaire sur l'*Organon* reste une des meilleures sources pour l'exégèse de cette œuvre, Jean Philopon (v. 490-566), qui a donné une définition devenue classique des termes du syllogisme, et Simplicius (vi^e s.).

logique (suite)

Boèce (v. 480-524) présente une importance particulière non pas à cause de sa compétence logique, mais parce qu'il a joué un rôle capital dans la transmission de l'héritage antique aux auteurs médiévaux. Il est l'auteur, notamment, d'un *De syllogismo hypothetico* et d'un *De syllogismo categorico*. C'est lui qui est en grande partie responsable de la présentation « traditionnelle » de la logique aristotélicienne : ainsi, par exemple, le syllogisme catégorique est régulièrement énoncé chez lui sous forme d'inférence, et le carré logique d'Apulée (qui ne comporte chez celui-ci que les relations dites « d'opposition ») est utilisé pour la première fois sous sa forme complète et avec le vocabulaire actuellement en usage (*contradictioires*, *contraires*, *subcontraires*, *subalternes*). Dans le *De syllogismo hypothetico*, on trouve un certain nombre de formules que l'on peut interpréter comme des lois ou des règles de la logique des propositions, bien que Boèce, manifestement beaucoup plus influencé par Aristote que par les stoïciens, ne les ait vraisemblablement pas conçues de cette façon, et dont certaines sont curieusement erronées.

La logique médiévale

La logique du Moyen Âge a été considérée longtemps comme peu digne d'intérêt et reste au total, aujourd'hui encore, relativement mal connue. Elle se caractérise, d'une manière générale, par sa dépendance à l'égard de la tradition antique (mais c'est seulement vers la fin du xii^e s. que le corpus tout entier de la logique aristotélicienne sera connu), par son utilisation du latin scientifique, considéré, semble-t-il, comme le prototype du langage pleinement rationnel, et par le rôle qu'ont joué dans sa production et son évolution des controverses de nature théologique et métaphysique. La logique que l'on peut appeler proprement *scolastique* a commencé à se développer au xii^e s. ; elle a atteint sa maturité aux xiv^e et xv^e s., et elle a connu un déclin rapide du xvi^e au xviii^e s.

La période de l'« Ancienne Logique » (Ars vetus)

Les principales sources utilisées sont l'*Isagoge* (introduction à l'*Organon* aristotélicien) de Porphyre, les *Catégories* et *De l'interprétation* d'Aristote. La logique aristotélicienne est connue essentiellement à travers les traductions et les commentaires de Boèce. Plus tard, lorsque la totalité du corpus aristotélicien sera devenue accessible, on donnera le nom d'*Ars vetus* à la logique fondée uniquement sur l'étude des trois traités ci-dessus, par opposition à l'*Ars nova*, qui utilisera l'*Organon* complet. On peut lire aussi à cette époque Apulée, les *Topiques* de Cicéron*, et des auteurs de moindre importance comme Cassiodore. Grâce à Cicéron, Boèce et Apulée, on dispose de certains éléments de la logique stoïcienne.

La période de l'*Ars vetus* est dominée incontestablement par la figure de Pierre Abélard* (1079-1142). Son œuvre, capitale dans le domaine de la logique, est une *Dialectique*, dont l'essentiel a été publié par V. Cousin (dans ses *Ouvrages inédits d'Abélard*, Paris, 1836) et dont la première édition complète est parue aux Pays-Bas en 1956. Abélard y reste apparemment entièrement tributaire de Boèce et d'Apulée pour ce qui est de la logique exposée ; et, en un certain sens, le traité ne fournit rien de plus qu'une présentation systématique des connaissances transmises par Boèce. Dans cet ouvrage et dans d'autres, qui s'occupent davantage de problèmes sémantiques et philosophiques que de logique, Abélard exprime son opposition à certaines interprétations métaphysiques de la logique et prend nettement parti, en particulier, contre le réalisme des universaux, manifestant ainsi avant la lettre des tendances « terministes ».

Jean de Salisbury (v. 1115-1180), un disciple d'Abélard, nous donne dans son *Metalogicon* de nombreux renseignements sur l'activité considérable des logiciens de cette époque. Il faut faire une place à part à Adam de Balsham, connu sous le nom de *Parvipondanus* parce qu'il enseignait à Paris près du Petit Pont, auteur d'un *Ars disserendi* (1132), où, entre autres paradoxes, est signalée (pour parler en termes modernes) la possibilité pour un ensemble d'être équipotent à l'un de ses sous-ensembles propres.

La période de la « Nouvelle Logique » (Ars nova)

On peut faire commencer cette période approximativement au milieu du ^{xii}e s., au moment où s'introduisent (entre 1136 et 1141) les *Analytiques*, les *Topiques* et les *Réfutations sophistiques* d'Aristote. Les logiciens les plus importants sont William of Shyreswood († 1249), Albert le Grand (v. 1200-1280) et leurs élèves : le futur pape Jean XXI, *Petrus Hispanus* (v. 1220-1277), John Duns* Scot (v. 1266-1308) et Raymond Lulle* (1233 ou 1235-1315).

L'assimilation de l'œuvre logique d'Aristote dans son intégralité a été grandement facilitée par l'influence des Arabes, qui, bien avant les logiciens scolastiques, avaient pris contact, par l'intermédiaire des moines syriaques, avec la totalité de l'*Organon*. Les Arabes considéraient Aristote comme le « premier philosophe », le second étant al-Fārābī († 950), responsable de l'introduction de la logique aristotélicienne dans la culture islamique, et le troisième Avicenne*. En fait, seuls quelques fragments insignifiants de l'important traité de logique d'Avicenne ont été connus des logiciens scolastiques à partir de la fin du ^{xii}e s. ; et le philosophe arabe qui a le plus fortement influencé ces derniers est sans conteste Averroès* (1126-1198), dont l'autorité était telle auprès d'eux qu'ils avaient coutume de l'appeler « le commentateur ».

La synthèse entre l'*Ars vetus* et l'*Ars nova* se trouvera réalisée vers le milieu du ^{xiii}e s. dans un certain nombre de grands traités didactiques, *compendia* ou *summulae*, qui serviront de manuels pour l'apprentissage de la logique et qui donnent certainement la meilleure idée de ce que pouvait être l'enseignement de cette discipline pendant la grande période scolastique. Les deux principaux sont les *Introductiones in logicam* de William of Shyreswood et les *Summulae logicae* de Petrus Hispanus (Pierre d'Espagne), qui ont été l'un des manuels de logique les plus utilisés au Moyen Âge. Tous les deux proposent, pour faciliter l'acquisition des règles logiques, des méthodes mnémoniques dont certaines sont demeurées en usage. Leur dette à l'égard des grammairiens et la part consacrée aux problèmes sémantiques sont importantes.

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedie/page/8122>

logique (suite)

Les summulistes se sont intéressés notamment à la théorie de la *supposition* (c'est-à-dire de la dénotation des termes). Une distinction importante, et qui a cours depuis Shyreswood, est celle de la supposition « matérielle » et de la supposition « formelle » : un terme est utilisé en supposition matérielle lorsqu'on s'en sert pour le désigner lui-même (usage autonome), en supposition formelle lorsqu'il est employé, comme c'est le cas normalement, pour la désignation d'autre chose. La supposition fait partie d'une famille de notions comme « signification », « copulation », « appellation », etc., qui servent à décrire les différentes fonctions possibles des mots ou des expressions dans les propositions. L'intérêt des summulistes pour les questions sémantiques les a conduits également à étudier de près une distinction qui remonte en fait beaucoup plus haut qu'eux (peut-être jusqu'aux stoïciens) : celle des termes catégorématiques et des termes syncatégorématiques. Alors que les termes catégorématiques ont une signification par eux-mêmes,

en ce sens qu'ils sont des signes pour certains objets, les termes syncatégorématiques (par exemple les connecteurs propositionnels, la copule « est », les quantificateurs « tous les », « quelques », etc.) n'acquièrent de signification que lorsqu'ils sont combinés avec des termes catégorématiques. Les nombreux traités qui portent, dans la logique médiévale, le titre de *Sophismata* seront consacrés non pas exactement à l'étude de ce que nous appellerions des « sophismes », mais plutôt à l'analyse de propositions qui présentent une ambiguïté caractéristique due, par exemple, à la présence de termes syncatégorématiques (délimitation imprécise de ce que nous appelons la « portée » d'un opérateur). Un autre thème important, au développement duquel Duns Scot a apporté une contribution décisive, est celui de l'*obligatio*. La notion d'*obligatio* renvoie à un système d'assertions que l'on se propose de défendre et dont il s'agit d'examiner les conséquences pour voir s'il n'entraîne aucune impossibilité. Ce problème n'est pas sans analogie avec celui qui a trait à la « consistance » d'un système hypothético-déductif.

De Raymond Lulle, on signalera simplement qu'il est l'inventeur d'un dispositif relativement primitif et assez limité dans ses possibilités pour la mécanisation de la déduction syllogistique. Bien que Leibniz ait dit de sa méthode qu'elle était l'« ombre seulement de la véritable combinatoire », il faut lui reconnaître néanmoins le mérite d'avoir anticipé de façon confuse l'idée d'une caractéristique et celle d'un calcul logique.

La « Logique des Modernes » (*Logica Modernorum*)

L'opposition des *antiqui* et des *moderni* est une opposition qui porte non pas comme celle de l'*Ars vetus* et de l'*Ars nova* sur le contenu proprement dit, mais plutôt sur le traitement de la logique, les premiers ayant tendance à voir en elle un instrument au service de la métaphysique et de la théologie et les seconds à la considérer comme une discipline autonome. Les grands *moderni* du xiv^e s. sont Guillaume* d'Occam (v. 1300 - v. 1349), Walter Burley ou Burleigh (v. 1275 - v. 1345), Jean Buridan (v. 1300 - apr. 1385) et Albert de Saxe (1316-1390). Dans les années 1300 commence ce qu'on peut appeler la période classique de la logique scolastique. L'impulsion essentielle semble être venue d'Angleterre (Roger Bacon*, v. 1214-1292). Cette période, que l'on appelle quelquefois *terministe* et qui a eu naturellement des antécédents au cours des xii^e et xiii^e s., se caractérise par des tendances formalistes et nominalistes (mais Burley s'est opposé directement à Guillaume d'Occam sur le problème des universaux) nettement accusées. La logique est bien séparée de la métaphysique et considérée avant tout comme une science du discours. Guillaume d'Occam est célèbre surtout par son nominalisme, qui est en réalité plutôt un conceptualisme, et par l'énoncé du principe appelé *rasoir d'Occam*, qui recommande l'élimination des entités superflues. Il est l'auteur de plusieurs « sommes de logique », dans lesquelles il apporte notamment des prolongements et des raffinements à la théorie des syllogismes modaux. Une des créations les plus intéressantes des logiciens de cette période est la théorie générale des « conséquences », qui inclut finalement comme une partie relativement mineure la théorie du syllogisme, chose qui apparaît pour la première fois de façon absolument nette dans le *De puritate artis logicae* de Burley. Les traités *De consequentiis* contiennent les lois fondamentales du calcul des propositions moderne et également certaines des lois du calcul des prédicats. Elles ne sont cependant pas formulées sous forme de lois, mais plutôt dans un métalangage sous forme de règles d'inférence.

Le terme *conséquence* est utilisé au Moyen Âge tantôt pour désigner une proposition de la forme « si..., alors », tantôt pour désigner une inférence. La distinction la plus importante est celle des conséquences *formelles* et des conséquences *matérielles*. Une conséquence formelle est définie par Buridan comme une conséquence telle que toute proposition ayant la même forme est une conséquence valide. En d'autres termes, une conséquence formelle correspond à ce que nous appellerions une implication logique ou une inférence logiquement, c'est-à-dire formellement, valide. Alors que, dans une conséquence matérielle, l'impossibilité pour le conséquent d'être faux

lorsque l'antécédent est vrai ne se fonde pas seulement sur les règles d'usage des constantes logiques, mais également sur le sens des termes catégorématiques, comme par exemple lorsque je dis : « Si quelque homme court, alors quelque animal court. »

Avec la constitution de la théorie des conséquences se trouve reconnue ce que nous appellerions l'antériorité du calcul des propositions sur le calcul des prédicats (dont fait partie la syllogistique), c'est-à-dire le fait que le syllogisme, considéré jusque-là comme la forme élémentaire de l'inférence valide, est en réalité sous la dépendance de formes d'inférence plus primitives, celles qui reposent sur la logique des propositions inanalysées.

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedia/page/8123>

Le déclin de la logique scolastique

Vers la fin du ^{xiv}^e s. commence le déclin de la logique scolastique. S'il est vrai qu'elle se répand largement et se maintient pendant plus d'un siècle à un haut niveau, elle ne produit plus rien de fondamentalement nouveau. Parmi les traités composés pendant cette période, il faut signaler surtout la monumentale *Logica magna* de Paul de Venise (v. 1372-1429), qui se caractérise par un traitement formel remarquablement soigné de la logique. De nombreux commentaires sont rédigés durant cette période, notamment sur les *Summulae* de Petrus Hispanus et sur Buridan. Les adversaires les plus décidés de la logique scolastique seront les humanistes de la Renaissance, qui, loin de faire bénéficier Aristote et sa logique de leur admiration pour l'Antiquité, en feront au contraire une de leurs cibles favorites. Malgré un semblant de renaissance vers la fin du ^{xvi}^e s., la logique scolastique ne fait plus guère que se survivre à elle-même au cours des ^{xvi}^e et ^{xvii}^e s.

La période classique

L'œuvre de logique la plus célèbre chez les humanistes du ^{xvi}^e s. fut celle de Pierre de la Ramée (*Petrus Ramus*, 1515-1572), qui, avec sa *Dialectique*, parue en 1555, publia l'un des premiers ouvrages de logique dignes d'intérêt en langue vulgaire, et dont l'inspiration fut violemment antiaristotélicienne et l'apport à la logique proprement dite en fait plutôt mince.

Joachim Jungius, dans sa *Logica Hamburgensis*, parue en 1638, met en évidence et analyse un certain nombre d'inférences qui ne sont pas réductibles aux formes traditionnelles. Ce qui l'amène à fournir les premiers éléments d'une logique des relations qui, malheureusement, a été ignorée ou dédaignée par ses successeurs immédiats.

Il faut mentionner également le cartésien Arnold Geulincx, qui, dans sa *Logica fundamentis suis a quibus collapsa fuerat restituta* (1662), entreprit une réforme intéressante de la logique scolastique et à qui l'on doit notamment la formulation et la démonstration d'un certain nombre de lois du calcul propositionnel.

La « Logique de Port-Royal »

La *Logique* dite de Port-Royal est un traité qui parut anonymement en 1662 sous le titre *Logique ou Art de penser* et dont les auteurs sont Antoine Arnauld et Pierre Nicole. L'ouvrage a été très longtemps et très largement utilisé. Sa division en quatre parties : idée, jugement, raisonnement et méthode, suit Ramus ; mais le traitement des trois premières parties est fondamentalement aristotélicien.

C'est la *Logique de Port-Royal* qui introduit (au moins pour ce qui est du vocabulaire) la distinction entre la *compréhension* et l'*étendue* (l'extension) d'une idée ou, comme nous dirions, d'un concept ou d'un terme, c'est-à-dire entre les attributs qui sont contenus dans le concept et l'ensemble des individus auxquels il s'applique. Le trait caractéristique de l'ouvrage est le fait qu'il essaie de combiner l'héritage aristotélico-

scolastique avec des apports modernes. À l'influence de Descartes vient s'ajouter celle de Pascal, dont la *Logique de Port-Royal* expose les idées sur la nature de la définition. C'est Pascal qui le premier a reconnu clairement que toute science démonstrative devait commencer non seulement par des propositions non démontrées, mais également par des termes non définis, ou *termes primitifs* comme ils sont appelés dans la *Logique de Port-Royal*. Pascal restreint les définitions en mathématiques à des définitions nominales, les « définitions de nom », qui fonctionnent essentiellement comme des conventions d'abréviation et, par conséquent, échappent à toute contestation. Mais ni lui ni la *Logique de Port-Royal* ne vont jusqu'à l'idée que les termes primitifs et les axiomes peuvent, tout comme les définitions nominales, être choisis arbitrairement. Ils insistent au contraire sur la nécessité, pour les termes primitifs, de renvoyer à des choses immédiatement et parfaitement connues et, pour les axiomes, d'exprimer des vérités évidentes.

Leibniz*

H. Scholz considère que l'histoire de la logique se divise en deux sections bien distinctes : l'une, qui comprend tout ce qui n'est pas inspiré par l'idée leibnizienne de la logistique et pour laquelle la distinction habituelle entre l'Antiquité, le Moyen Âge et les Temps modernes n'a pas beaucoup de sens ; l'autre, qui correspond à la forme proprement moderne de la logique formelle « et qui comprend tout ce qui a été inspiré consciemment ou inconsciemment par l'idée leibnizienne de la logistique ». Mais il faut noter immédiatement d'une part que, loin de rompre brutalement avec la syllogistique aristotélico-scolastique, Leibniz la tenait au contraire pour une des productions les plus remarquables de l'esprit humain et s'est appliqué à la perfectionner de différentes manières, d'autre part que la logique mathématique s'est constituée indépendamment de Leibniz et dans l'ignorance de ses écrits logiques.

Dans un texte de jeunesse (*Dissertatio de arte combinatoria*, 1666), Leibniz forme le projet d'un système de notation universel fondé sur les principes suivants : on procédera à un recensement exhaustif de toutes les idées simples qui constituent le matériau de base des connaissances humaines et on les désignera par des symboles de type algébrique, de manière à obtenir une sorte d'« alphabet des pensées ». Les idées composées pourront alors être représentées par des combinaisons appropriées de symboles élémentaires correspondant aux idées simples qui entrent dans leur composition. Cette tentative de construction d'une *lingua characteristica universalis*, qui repose en partie sur les idées de Lulle, a intéressé toute sa vie Leibniz, dont l'enthousiasme contraste sur ce point avec le scepticisme de Descartes. Il y a ajouté par la suite l'idée d'un *calculus ratiocinator*, d'une méthode de raisonnement mathématisée, qui anticipe notre conception moderne d'un calcul logique.

Dans le domaine de la syllogistique, Leibniz s'est appliqué à compléter et à systématiser le tableau des modes possibles. Au lieu des quatorze modes aristotéliens ou des dix-neuf de Théophraste, il parvient finalement à un ensemble parfaitement régulier de vingt-quatre modes, dont six appartiennent à chaque figure, la quatrième étant reconnue au même titre que les trois autres. Les deux modes supplémentaires de la première figure (*barbari*, *celaront*) sont démontrés par subalternation, la subalternation se démontrant elle-même à partir de *darii* et *ferio* ; les modes de la deuxième et de la troisième figure sont démontrés à partir de ceux de la première à l'aide du seul principe de contradiction (*per regressum*) ; quant à ceux de la quatrième figure, leur démonstration requiert l'usage de la conversion, mais celle-ci se démontre à l'aide de syllogismes des deuxième et troisième figures. La logique moderne s'est séparée de Leibniz en renonçant à admettre la validité universelle de la subalternation. Leibniz a apporté une autre contribution intéressante à la logique traditionnelle en proposant différents modes de représentation diagrammatique des inférences syllogistiques.

Les tentatives de construction effective d'un *calculus ratiocinator* ont été effectuées pendant la période qui va de 1679 à 1690, l'une en 1679, une autre dans les années 1685-86, et une dernière en 1690. On y trouve un certain nombre d'éléments concrets qui auraient pu constituer les bases d'un traitement proprement moderne de la logique, notamment en ce qui concerne le calcul des classes. La limitation la plus sérieuse qui affecte la logique de Leibniz est probablement sa fidélité à la conception attributive de la proposition, qui, en dépit du

fait qu'il connaissait et admirait les travaux de Jungius, l'empêche de développer une véritable logique des relations.

Malgré la relative prudence qu'il observe dans les *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, Leibniz a tendance à surestimer l'importance des principes de contradiction et d'identité et semble bien avoir été convaincu à certains moments que toutes les vérités nécessaires (« vérités de raison ») devaient pouvoir être démontrées à partir de ces deux principes. Kant adopte une position fondamentalement analogue à celle de Leibniz lorsqu'il fait du principe de contradiction le principe suprême de tous les jugements analytiques.

Parmi les successeurs de Leibniz, il faut faire une place à Jean Henri Lambert (1728-1777), qui reprend la tentative de constitution d'un calcul logique et fournit notamment quelques éléments de logique des relations, et à L. Euler* (1707-1783), auteur d'une méthode de représentation figurée des déductions syllogistiques inspirée de Leibniz et connue habituellement sous le nom de *méthode des diagrammes d'Euler*.

Le père Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) est connu surtout par sa tentative infructueuse de démonstration du postulat euclidien des parallèles, qui suggérera, un siècle plus tard, la constitution des géométries non euclidiennes. Mais il avait publié auparavant une *Logica demonstrativa* dans laquelle il essayait d'appliquer à la logique une méthode strictement « géométrique ». Deux points importants y sont en particulier soulignés : (1) la *consequentia mirabilis* (ou « loi de Clavius ») et la méthode correspondante de démonstration d'une proposition qui consiste à établir qu'elle est une conséquence de sa propre négation ; (2) la distinction entre les définitions nominales et les définitions réelles, sur laquelle avaient déjà insisté Pascal et la *Logique de Port-Royal*.

À l'exception de Leibniz (et plus tard de Husserl), les grands philosophes modernes n'ont guère porté d'intérêt à la logique formelle. Kant* est connu pour avoir considéré qu'elle n'avait fait ni ne pouvait faire aucun progrès réel depuis Aristote. Sa distinction entre propositions *analytiques* et propositions *synthétiques* est importante du point de vue du vocabulaire qui sera utilisé par la suite ; mais, telle qu'elle est présentée chez lui, elle est notoirement insuffisante et imprécise. Hegel* a été un adversaire particulièrement virulent du traitement formel de la logique (en particulier du projet leibnizien de langage symbolique universel) et des tentatives de mécanisation de l'inférence logique. Sa « logique » métaphysique est habituellement ignorée ou traitée de façon particulièrement sévère par les historiens de la logique. Stuart Mill*, auteur de *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive* (*Logique inductive et déductive*, 1843), est connu surtout par la contribution qu'il a apportée à la logique inductive. Sa logique est d'inspiration antiformaliste et empiriste. Du point de vue de la terminologie, on lui doit l'introduction de la distinction entre la *connotation* et la *dénotation* d'un terme.

Bolzano

Bernhard Bolzano (1781-1848) est notamment l'auteur d'une monumentale *Wissenschaftslehre* (1837) et de *Paradoxien des Unendlichen* (1851). La *Wissenschaftslehre* contient un certain nombre de contributions originales et très modernes à la logique proprement dite. Mais il a fallu attendre Husserl pour que l'importance de l'œuvre de Bolzano dans l'histoire de la logique soit signalée et reconnue. C'est certainement Bolzano qui a proposé pour la distinction entre propositions analytiques et propositions synthétiques la première définition digne d'intérêt. On notera que la caractérisation bolzaniennne de la notion d'analyticité s'applique non pas à des phrases déclaratives, en tant qu'entités linguistiques, mais plutôt aux contenus de signification propositionnels (*Sätze an sich*) qu'elles expriment. Elle est donc beaucoup moins précise et beaucoup plus problématique qu'elle ne peut le paraître lorsqu'elle est transcrite dans la terminologie moderne. Bolzano part d'une proposition vraie ou fausse et considère ce qu'il advient de sa valeur de vérité lorsqu'on effectue toutes les substitutions possibles de termes appropriés à l'un ou l'autre de ses termes. Si toutes les « variantes » ainsi obtenues sont vraies, la proposition sera dite universellement valide par rapport à celui ou ceux de ses constituants pour lesquels la substitution a été envisagée. Si elles sont toutes fausses, elle sera dite universellement contravalide par rapport au constituant ou aux constituants en question. Le degré de validité d'une proposition relativement à un des constituants est défini comme le rapport du nombre des variantes vraies au nombre des variantes fausses (cette notion est importante pour la théorie de la probabilité

développée par Bolzano). Si une proposition est soit universellement valide soit universellement contravalide par rapport à certains constituants, elle est dite « analytique » par rapport à eux ; sinon, elle est dite « synthétique ». Cette définition est évidemment beaucoup trop large pour pouvoir rendre compte des notions de vérité et de fausseté logiques au sens étroit. Bolzano considère donc que l'on pourrait appeler *logiquement analytique* ou *analytique au sens étroit* une proposition qui est analytique par rapport à tous ses constituants extra-logiques (pour parler en termes modernes). Cela revient à peu de chose près à dire qu'une proposition est logiquement vraie ou fausse si elle est vraie ou fausse d'une manière telle que seuls des mots du vocabulaire logique, à l'exclusion de tout terme descriptif, y ont des occurrences « essentielles », selon une définition célèbre proposée en 1940 par Quine. Une des particularités du langage de Bolzano est qu'il désigne par *analyticité* aussi bien un certain type de fausseté qu'un certain type de vérité, cela dans le dessein d'obtenir une répartition exhaustive des propositions en analytiques et synthétiques, à la différence de ce qui se passe chez Kant. C'est cependant l'usage kantien qui a été adopté le plus souvent par la suite. Carnap a suggéré, pour sa part, d'appeler *L-déterminées* (logiquement déterminées) les propositions qui sont logiquement vraies (analytiques) ou logiquement fausses (contradictaires). Une autre notion très importante analysée par la *Wissenschaftslehre* est celle de *dérivabilité* (*Ableitbarkeit*), dont Bolzano donne une définition finalement assez proche de celle de notre concept sémantique de conséquence logique.

La logique mathématique

L'algèbre* de la logique

L'algèbre de la logique voit le jour avec deux ouvrages qui paraissent simultanément en 1847 (*The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, de Boole, et *Formal Logic*, de De Morgan). Elle comprendra deux parties principales : l'algèbre des classes et l'algèbre des relations. Avec l'introduction du traitement algébrique de la logique se trouve réalisée effectivement la mathématisation de cette discipline, qui avait déjà été entrevue et esquissée par Leibniz.

Si Augustus De Morgan (1806-1871) apporte des idées neuves, son point de départ est en fait le plus souvent la logique traditionnelle, c'est-à-dire la théorie du syllogisme, à laquelle il a consacré notamment quatre mémoires importants parus entre 1850 et 1863 dans les *Cambridge Philosophical Transactions*. Il avait eu à ce sujet une querelle de priorité avec sir William Hamilton (1788-1856), dont l'innovation majeure avait consisté à introduire en 1833 la quantification du prédicat en plus de celle du sujet. En fait, De Morgan n'eut pas de peine à établir que sa théorie était tout à fait indépendante et fondamentalement différente de celle de Hamilton. C'est à lui que l'on doit l'introduction de la notion d'« univers du discours » pour désigner le domaine plus ou moins restreint des choses auxquelles on se réfère, le plus souvent implicitement, lorsqu'on introduit un couple de concepts opposés (par exemple l'ensemble des animaux pour le couple « vertébré/invertébré »). La *Formal Logic* contient des éléments d'algèbre des classes. On y trouve notamment formulées les lois de dualité entre la somme et le produit.

$$(FG)' = F' + G', (F + G)' = F'G',$$

qui peuvent être transposées au calcul propositionnel, où elles sont valables pour la conjonction et la disjonction ; on les a appelées également plus tard *lois de De Morgan*.

Mais c'est surtout l'algèbre des relations qui a reçu de De Morgan une impulsion décisive. En un certain sens, celui-ci peut en être considéré comme le véritable créateur. La mise au jour de l'idée générale de relation constitue un événement d'une importance capitale qui dépasse la syllogistique de sa position privilégiée et la fait apparaître comme une partie importante, mais très réduite, d'une logique beaucoup plus vaste. Les progrès les plus remarquables en matière de logique des relations seront accomplis, après De Morgan, par Peirce, Ernst Schröder (1841-1902) et Russell.

La méthode utilisée par George Boole* en 1847 et 1854 (*An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*) n'est pas exactement ce que l'on peut appeler une algèbre des classes, mais plutôt une application de l'algèbre numérique ordinaire à la logique des classes. On se donne une algèbre dont les variables x, y, z , etc., n'admettent comme valeurs que les nombres 0 et 1 et dont les axiomes, les opérations et les lois se révèlent être, dans une interprétation appropriée, ceux d'une algèbre des classes. L'interprétation en question est celle qui fait correspondre aux symboles littéraux des concepts interprétés en extension (c'est-à-dire des classes), à « 0 » la classe vide et à « 1 » la classe universelle. $1.x$, ou x , est la classe obtenue en sélectionnant dans 1 tous les objets qui sont des X ; $1.x.y$, ou xy , la classe dont les éléments sont à la fois des X et des Y ; $x + y$ la classe dont les éléments sont soit des X , soit des Y , mais non les deux ; $x - y$ la classe dont les éléments sont des X , mais ne sont pas des Y ; $1 - x$ la classe dont les éléments ne sont pas des X . La loi qui distingue l'algèbre binaire de l'algèbre numérique ordinaire est « $x^2 = x$ », que nous appellerions aujourd'hui la loi d'idempotence et que Boole appelle *index law*. La loi « $x(1 - x) = 0$ » exprime, dans l'interprétation logique, la loi de contradiction ou, comme Boole l'appelle, la *loi de dualité* ; « $x + (1 - x) = 1$ », la loi du tiers exclu, etc.

Le fait que Boole exige que, dans $x + y$, x et y soient deux classes disjointes (ce qui a l'avantage de rendre l'addition et la soustraction strictement inverses) lui interdit de reconnaître deux lois importantes de l'algèbre des classes classiques :

(1) $x + x = x$ et (2) $x = x + xy$.

Une des améliorations apportées par William Stanley Jevons (1835-1882) au calcul logique de Boole a consisté à interpréter le symbole « + » par la réunion de deux classes, c'est-à-dire à remplacer l'interprétation exclusive de la somme logique par l'interprétation inclusive. John Venn (1834-1923) est plus proche de Boole que Jevons. On retrouve chez lui l'inspiration mathématique que le second avait vivement reprochée au premier, et l'interprétation exclusive de l'addition. Mais il est surtout connu aujourd'hui par l'introduction des diagrammes qui portent son nom et qui constituent un perfectionnement de ceux d'Euler. Les trois cercles eulériens qui servent à la représentation d'une inférence syllogistique sont tracés de manière à se couper tous deux à deux, divisant par le fait le rectangle dont la surface représente l'univers du discours considéré en huit compartiments. Pour représenter les prémisses, on hachure certains compartiments, qui symbolisent des classes vides, et on inscrit une croix dans d'autres, qui correspondent à des classes occupées. Si l'inférence que l'on a à étudier fait intervenir n termes ($n > 3$), on pourra utiliser des ellipses ou d'autres figures plus compliquées, qui, par leurs intersections, divisent le rectangle en 2^n compartiments, et procéder ensuite de la même manière.

L'algèbre de la logique trouvera son achèvement et son couronnement dans deux ouvrages de synthèse publiés à la fin du siècle : les *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Leçons d'algèbre de la logique*), en trois volumes (1890-1905), de Schröder, et le *Treatise on Universal Algebra* (1898), d'Alfred North Whitehead (1861-1947). Le premier est remarquable en tant qu'exposé technique d'ensemble ; le second est beaucoup plus philosophique, intéressé davantage par le problème des fondements d'un calcul algébrique en général. L'algèbre de la logique sera axiomatisée pour la première fois de façon satisfaisante par E.-V. Huntington (1904). Il faut faire ici une place à part au logicien et mathématicien russe Platon Sergueïevitch Poretski (1846-1907), dont les méthodes originales et très perfectionnées sont exposées en partie dans *l'Algèbre de la logique* (1905) de Louis Couturat (1868-1914).

Cette algèbre comporte naturellement une troisième partie ou un troisième aspect : le calcul des propositions, qui est traité dans les *Leçons* de Schröder en combinaison avec le calcul des classes. Boole avait déjà envisagé la possibilité d'interpréter les variables de son algèbre comme des variables de proposition plutôt que comme des variables de classe. Mais le premier calcul des propositions véritable fait son apparition dans des mémoires publiés à partir de 1877 par Hugh MacColl. C'est à lui que l'on doit notamment la redécouverte des lois de De Morgan du calcul propositionnel, déjà connues des scolastiques (en particulier de Guillaume d'Occam).

Peirce

Charles Sanders Peirce (1839-1914) est l'auteur d'une œuvre monumentale consacrée à des sujets extrêmement divers. Dans le seul domaine de la logique, ses contributions sont exceptionnellement nombreuses et variées. On lui doit notamment toute une série de perfectionnements et d'inventions dans la théorie générale des relations et dans celle des relations d'ordre ; une anticipation de la découverte de M. H. Sheffer concernant la possibilité d'exprimer tous les connecteurs propositionnels à l'aide d'un seul d'entre eux (1880), et l'utilisation d'une procédure d'évaluation pour les expressions du calcul propositionnel qui est déjà celle des tables de vérité (1885) ; la définition logique classique de l'identité dans la ligne de Leibniz (1885) ; la définition d'un ensemble fini comme étant un ensemble qui ne peut être mis en correspondance biunivoque avec un de ses sous-ensembles propres (1881). On trouve également chez lui des éléments qui autorisent à le considérer, en ce qui concerne le problème des fondements de l'arithmétique, comme un précurseur direct de R. Dedekind* et de G. Peano. Il faut signaler enfin que Peirce est avec Venn (1880, 1881) le premier à avoir introduit explicitement la convention aujourd'hui en vigueur sur le problème de l'« import existentiel », c'est-à-dire celle qui consiste à considérer que les propositions existentielles, mais non les propositions universelles du syllogisme catégorique, impliquent l'existence de leur sujet. On peut remarquer que, tout à fait indépendamment de l'algèbre des classes, pour laquelle cette modification de la doctrine classique s'imposait particulièrement, Franz Brentano (1838-1917) avait adopté dans sa *Psychologie vom empirischen Standpunkt* (1874) une position analogue avec les conséquences qu'elle implique, c'est-à-dire le rejet de certaines formes d'inférence traditionnelles comme, par exemple, le syllogisme en *darapti*.

Frege

Gottlob Frege (1848-1925), dont les travaux n'ont suscité sur le moment à peu près aucun intérêt, est considéré aujourd'hui universellement comme le plus grand logicien de son époque. Avec lui s'effectue le passage de l'algèbre de la logique à ce qu'on a appelé plus tard la *logistique* (terme proposé au Congrès international de philosophie de Genève en 1904 par Itelson, A. Lalande et Couturat, et aujourd'hui quelque peu tombé en désuétude). Alors que la première s'était efforcée essentiellement de créer une logique mathématisée, c'est-à-dire de faire de la logique une théorie mathématique particulière, la seconde essaiera d'être avant tout une logique *des* mathématiques, c'est-à-dire de rendre logique, voire de logicer, le discours des mathématiques.

C'est essentiellement pour les besoins des mathématiques que Frege a été amené à révolutionner la logique. Si l'on veut atteindre, remarque-t-il, à l'idéal d'une méthode parfaitement scientifique en mathématiques, il faut non seulement que les propositions initiales non démontrées soient réduites à un nombre minimal et énoncées expressément, mais également que les méthodes d'inférence utilisées soient spécifiées d'avance. Pour éliminer le recours à l'intuition dans les enchaînements logiques, lequel représente à la fois un manque de rigueur caractéristique et une source d'erreur, il importe de pourvoir le *raisonnement* mathématique lui-même d'un langage aussi exact que celui des mathématiques, d'une écriture idéographique qui permette de représenter adéquatement et de tester commodément et à coup sûr les étapes successives du cheminement déductif.

Tel est l'objet de la *Begriffsschrift* (1879), un ouvrage dans lequel Frege propose un système d'écriture logique très perfectionné qui permet d'exhiber de façon beaucoup plus claire qu'auparavant la structure logique des propositions et des démonstrations, mais auquel on a par la suite, pour des raisons de commodité, préféré celui de Peano. La *Begriffsschrift* contient la première présentation systématique du calcul des propositions et du calcul des prédicats avec identité. On y voit apparaître notamment l'usage des quantificateurs (suggéré, il est vrai, également de façon indépendante par O. H. Mitchell, à qui Peirce attribue l'idée dans un texte de 1885).

La réduction des mathématiques à la logique, qui constitue la grande ambition de ce qu'on a appelé le *logicisme*, est décrite et défendue par Frege dans *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) et réalisée de façon systématique dans les *Grundgesetze der Arithmetik* (en deux volumes, 1893-1903). À la différence de Dedekind, qui utilise comme point de départ les notions d'ensemble et d'appartenance d'un élément à un ensemble, ce qui l'amène à jeter les premiers fondements d'une théorie des ensembles, Frege, qui ne considère pas ces deux notions fondamentales comme des notions proprement logiques, s'exprime en termes

de concepts et de relations. Dans les *Fondements de l'arithmétique*, il montre qu'un nombre cardinal (*Anzahl*) doit être considéré comme une propriété non pas d'objets, comme on l'a cru souvent, mais de propriétés ou de concepts. Il introduit le terme *équinumérique* (*gleichzahlig*) pour désigner la relation qui existe entre deux concepts lorsque les classes qu'ils déterminent respectivement peuvent être mises en correspondance biunivoque ; et il définit alors le nombre qui appartient au concept F comme l'extension du concept « équinumérique au concept F », en d'autres termes comme la classe des concepts qui sont équinumériques au concept F . Il procède ensuite à la définition de « 0 » et de la relation « successeur » de la façon suivante :

« 0 est le nombre cardinal qui appartient au concept « non identique à soi-même » ;

« n suit immédiatement m dans la suite naturelle des nombres » signifie : « Il existe un concept F et un objet x qui tombe sous ce concept, tel que le nombre cardinal qui appartient à ce concept est n et que le nombre cardinal qui appartient au concept « qui tombe sous F , mais n'est pas identique à x » est m . »

La définition du concept général de nombre cardinal inductif (fini) est un peu plus délicate à obtenir. Dans le langage légèrement différent des *Principia mathematica*, elle revient à dire que x est un nombre cardinal fini (un entier naturel) s'il appartient à toutes les classes héréditaires auxquelles appartient 0 (une classe de nombres cardinaux est héréditaire si, toutes les fois qu'elle contient un nombre, elle contient également son successeur). Le nombre cardinal du concept « nombre cardinal fini » est le premier cardinal infini, qui correspond à la puissance du dénombrable de Cantor. Dans les *Grundgesetze*, des définitions formelles seront données, et le traitement de l'arithmétique des cardinaux sera complété par une théorie des nombres réels.

Frege avait achevé la rédaction du deuxième volume de cet ouvrage lorsqu'il reçut de Russell en 1902 une lettre lui exposant l'antinomie de l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes, connue depuis sous le nom d'*antinomie de Russell*. La découverte de cette antinomie semble bien avoir été interprétée par lui comme tout à fait ruineuse pour le système qu'il avait laborieusement construit. En dépit du fait qu'il propose lui-même un remède possible, qui consisterait à modifier l'un de ses axiomes de manière à rendre impossible l'obtention de la contradiction, l'obligation de recourir à un expédient de ce genre ne pouvait pas ne pas jeter, dans son esprit, un doute sur la valeur absolue des fondements logiques qu'il avait proposés pour l'arithmétique.

Frege utilise dans les *Grundgesetze* la distinction fondamentale qu'il avait élaborée dans *Sinn und Bedeutung* (1892) entre le sens (*Sinn*) et la dénotation (*Bedeutung*) d'une expression. Les deux expressions « l'étoile du matin » et « l'étoile du soir » ont deux sens différents, mais ont la même dénotation, c'est-à-dire désignent le même objet : la planète Vénus. Cette distinction, tout à fait naturelle en ce qui concerne les noms, est étendue de façon quelque peu artificielle aux propositions. Le sens d'une proposition est la « pensée » (*Gedanke*) qu'elle exprime (il s'agit du contenu de signification objectif, non de la représentation mentale subjective). Sa dénotation est sa valeur de vérité. Les propositions sont considérées en fait comme des noms d'une certaine espèce, toute proposition vraie étant un nom du Vrai et toute proposition fausse un nom du Faux. Les théories sémantiques de Church et de Carnap s'inspirent directement de Frege sur un certain nombre de points fondamentaux.

En ce qui concerne la logique proprement dite, les travaux de Frege se caractérisent notamment par une exigence de rigueur tout à fait inaccoutumée dans le discours métalogue, par exemple en ce qui concerne la distinction capitale entre l'*usage* et la *mention* d'un symbole ou d'une expression, qui avait été clairement reconnue dans les théories médiévales de la *suppositio*, mais avait été et reste encore souvent négligée.

Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) est important à cause de son influence sur Russell et de la contribution qu'il a apportée à la constitution d'un système de notation logique plus utilisable que ceux de ses prédécesseurs (notamment celui de Frege). De ce système, qui a été adopté par Russell, il subsiste beaucoup de choses dans la notation logique actuellement en usage. Sur un point essentiel, les préoccupations de Peano coïncident avec celles de Frege : trouver une écriture symbolique (la « pasigraphie ») dans laquelle puisse être exprimée la totalité des propositions et des déductions mathématiques. Les principes fondamentaux de l'idéographie

péanienne avaient été exposés dans les *Notations de logique mathématique* (1894) et seront mis en œuvre dans les cinq éditions ou volumes successifs du *Formulaire de mathématiques* (1895-1908). À cette grandiose entreprise de traduction ne correspondent chez Peano et ses collaborateurs aucune intention proprement philosophique ni rien de tel qu'un projet de réduction des mathématiques à la logique. Peano introduit le symbole $\in$ pour désigner l'appartenance d'un individu à une classe et fait une distinction nette entre cette relation et celle de l'inclusion d'une classe dans une autre. Il ramène toute l'arithmétique à trois notions primitives : « nombre », « zéro » et « successeur », et à cinq axiomes, connus depuis sous le nom d'*axiomes de Peano*, que l'on peut exprimer en langage familier de la façon suivante : (1) 0 est un nombre ; (2) le successeur d'un nombre quelconque est un nombre ; (3) si une classe contient 0 et, toutes les fois qu'elle contient un nombre, contient également son successeur, alors elle contient tous les nombres ; (4) deux nombres différents ne peuvent avoir le même successeur ; (5) 0 n'est le successeur d'aucun nombre. Mais ces propositions sont empruntées en fait à un essai de Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ? (Nature et signification des nombres)* [1888], où elles ne sont cependant pas utilisées comme axiomes.

Parmi les rédacteurs du *Formulaire*, Cesare Burali-Forti (1861-1931) mérite une mention spéciale pour avoir découvert (ou plus exactement mis à l'ordre du jour, car elle était déjà connue de Cantor*) en 1897 l'antinomie qui porte son nom. Il s'agit de l'antinomie qui a trait au nombre ordinal de l'ensemble de tous les nombres ordinaux.

Russell*

Bertrand Russell (1872-1970) a adopté assez rapidement la thèse frégréenne selon laquelle les mathématiques sont une branche de la logique, en ce sens que tous les termes de l'arithmétique peuvent être définis entièrement à l'aide de termes logiques, et tous les théorèmes de l'arithmétique démontrés à partir d'axiomes uniquement logiques. Au début des *Principles of Mathematics* (1903), il donne la définition suivante : « Les mathématiques pures sont constituées par la classe de toutes les propositions de la forme « p implique q » dans lesquelles p et q sont des propositions contenant une ou plusieurs variables, les mêmes dans les deux propositions, et ni p ni q ne contiennent de constantes quelconques si ce n'est des constantes logiques. Et les constantes logiques sont toutes les notions qui peuvent être définies dans les termes de celles qui suivent : l'implication, la relation d'un terme à une classe dont il est un élément, la notion de *tel que*, la notion de relation et certaines autres notions qui peuvent être impliquées dans la notion générale de propositions de la forme ci-dessus. En plus de celles-là, les mathématiques *utilisent* une notion qui n'est pas un constituant des propositions qu'elles considèrent, à savoir la notion de vérité. »

Les *Principles* entreprennent de justifier cette définition en examinant de façon détaillée les branches principales des mathématiques pures et en ramenant les concepts qui y interviennent à des concepts purement logiques. Dans cet ouvrage, Russell n'utilise pas encore la notation logique symbolique ; mais, pour obtenir le traitement rigoureux et systématique des *Principia mathematica* (1910-1913), il adoptera un langage logique très précis et très élaboré, inspiré de celui de Peano. Dans ce dernier ouvrage, que Russell a rédigé en collaboration avec Whitehead, les deux auteurs ne s'imposent pas seulement la tâche de réécriture symbolique et d'axiomatisation des mathématiques qui avait été celle de Peano, mais également celle de la réinterprétation des concepts primitifs et des propositions primitives de celui-ci en termes logiques. Les *Principia mathematica* constituent, par conséquent, la réalisation complète du programme frégréen. La contradiction qui affectait le système de Frege est évitée par l'introduction de la théorie des types, qui avait été exposée par Russell dans un mémoire de 1908 et qui exclut comme dénuées de sens des expressions du genre de celle qui donne naissance à la contradiction en question.

La théorie des types *simple* opère simplement une stratification des expressions formelles en expressions du premier niveau (désignant des individus), expressions du deuxième niveau (désignant des classes qui ont pour éléments des individus), expressions du troisième niveau (désignant des classes qui ont pour éléments des classes d'individus), etc. et stipule que dans une expression de la forme $A \in B$, B peut être d'un niveau n quelconque supérieur au premier, mais A doit être alors de niveau $n - 1$. Les *Principia mathematica* utilisent

en fait une théorie des types *ramifiée* qui permet d'éviter non seulement les antinomies dites « logiques », comme l'antonomie de Russell, mais également les antinomies dites « sémantiques », comme celles de Kurt Grelling et de Jules Richard. Cette théorie est beaucoup plus complexe que la théorie des types simples, et elle oblige Whitehead et Russell à introduire un expédient peu satisfaisant : l'axiome de réductibilité, qui a suscité diverses objections.

L'abandon de la théorie ramifiée pour la théorie simple, indiqué en 1921 par Leon Chwistek (1884-1944), s'est effectué sous l'impulsion de Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), qui a montré (1926) que la dernière était suffisante pour l'élimination des contradictions logiques et que les mathématiques n'étaient pas directement concernées par le problème des contradictions sémantiques. C'est la théorie des types simple qui est devenue d'un usage général, après que Carnap en eut donné une formulation standard dans l'*Abriss der Logistik* (1929) et qu'elle eut été adoptée également par Kurt Gödel (1931).

Une autre contribution capitale de Russell est la « théorie des descriptions définies », c'est-à-dire l'analyse logique des expressions de la forme « le tel-et-tel » (par exemple « le deuxième président de la République française »). Russell montre que les expressions de ce type peuvent toujours au besoin être éliminées contextuellement, c'est-à-dire que toute proposition douée de sens dans laquelle elles figurent peut être paraphrasée en une proposition équivalente dans laquelle elles ne figurent plus. Par exemple, la proposition « L'auteur de *Waverley* est écossais » devient dans la transcription russellienne : « Il y a un individu et un seul qui a écrit *Waverley*, et tout individu ayant écrit *Waverley* est écossais. » La procédure russellienne d'élimination des descriptions définies a été reprise et améliorée du point de vue technique en 1940 par Willard van Orman Quine (né en 1908).

Zermelo

Ernst Zermelo (1871-1953) a énoncé en 1904 l'axiome du choix, qui était utilisé jusque-là comme un présupposé tacite. Il a proposé dans un mémoire de 1908 une axiomatisation de la théorie des ensembles qui comporte sept axiomes et permet d'échapper aux contradictions aussi bien logiques que sémantiques. Le principe cantorien en vertu duquel toute propriété qui peut être conçue fait exister en quelque sorte un ensemble correspondant est remplacé chez Zermelo par un axiome de séparation (*Aussonderungssaxiom*), qui stipule simplement que toute propriété définie de façon appropriée « sélectionne » un sous-ensemble correspondant dans un ensemble déjà donné (c'est-à-dire pouvant être construit à l'aide des axiomes). Mais cet axiome fait intervenir une notion problématique, celle de « propriété bien déterminée » (*definite Eigenschaft*), qui est laissée relativement dans le vague. Différentes suggestions ont été faites par la suite pour remédier à cet inconvénient, notamment en 1921-22 par Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965), en 1922-23 par Thoralf Skolem et en 1929 par Zermelo lui-même. Fraenkel et Skolem ont montré (1922) la nécessité d'introduire, pour garantir l'existence d'ensembles suffisamment « grands », un axiome supplémentaire, l'axiome de remplacement. Les axiomes de Zermelo amendés par Fraenkel et Skolem constituent aujourd'hui une axiomatique standard, dite « de Zermelo-Fraenkel » (ZF), pour la théorie des ensembles. Pour exclure l'existence d'ensembles *extraordinaires*, c'est-à-dire d'ensembles donnant lieu à une chaîne descendante infinie de relations d'appartenance, von Neumann a proposé en 1929 l'introduction d'un axiome dit « de régularité » (*Fundierungssaxiom*), dont une autre version a été donnée en 1930 par Zermelo.

Hilbert*

Le Russell des *Principia mathematica* était à la fois mathématicien, logicien et philosophe. David Hilbert (1862-1943) est avant tout un mathématicien, et l'un de ceux qui ont fait faire aux mathématiques des progrès décisifs. Sa philosophie des mathématiques, qui a reçu le nom de « formalisme », obéit à une inspiration toute différente de celle de Russell. Les idées de Hilbert sont exposées, sous leur forme achevée, dans les deux volumes des *Grundlagen der Mathematik* (1934, 1939), qui ont été rédigés en collaboration avec Paul Bernays (né en 1888).

À la base de la conception hilbertienne, on trouve la conviction que les symboles et les opérations sur ces symboles constituent le noyau central irréductible des mathématiques. La réalisabilité d'un système axiomatique ne peut être établie dans tous les cas par la méthode qui consiste à en exhiber une réalisation. D'où la nécessité de recourir à une démonstration de consistance, c'est-à-dire à une démonstration du fait qu'aucune contradiction ne peut être déduite des axiomes. Tel est le problème qui deviendra chez Hilbert le problème central et auquel s'identifiera en quelque sorte le problème dit « du fondement des mathématiques » : donner, pour chaque branche des mathématiques, une démonstration du fait que les procédés de démonstration qui y sont admis ne produiront jamais à la fois comme théorèmes une proposition et sa négation. Pour réaliser ce programme, Hilbert constitue ce qu'il appelle une « théorie de la démonstration ». Le principe en est le suivant : toute théorie mathématique peut être mise aujourd'hui sous la forme d'un système rigoureusement formalisé, c'est-à-dire d'un ensemble de formules qui ne se distinguent des formules mathématiques habituelles que par le fait qu'en plus des symboles ordinaires elles comportent certains symboles logiques. Une démonstration est une suite de formules symboliques dont chacune ou bien est un axiome, ou bien est obtenue à partir de formules précédentes à l'aide de règles d'inférence préalablement spécifiées. D'où la possibilité de faire des démonstrations elles-mêmes l'objet d'une étude mathématique : à la mathématique ordinaire, ainsi formalisée, vient s'ajouter une métamathématique, dans laquelle les démarches de la première sont considérées uniquement en tant qu'elles représentent des opérations sur des formes écrites. Il est bien spécifié qu'à la différence de la mathématique formelle, dont elle doit examiner et justifier les démonstrations, la métamathématique ne doit utiliser pour sa part que des méthodes de démonstration ayant un caractère intuitif et rigoureusement finitaire.

Pour certains systèmes élémentaires, la démonstration de consistance a pu être obtenue sans trop de difficulté. Mais pour tous les systèmes d'une certaine puissance, comme par exemple l'arithmétique des entiers naturels, une démonstration de consistance n'est possible que si l'on renonce à user de moyens strictement finitaires. C'est ainsi que G. Gentzen a pu donner en 1936 une démonstration de non-contradiction pour l'arithmétique en utilisant la méthode dite « d'induction transfinie ».

Alors que, si l'on excepte W. van Orman Quine (*Mathematical Logic*, 1940) et, dans une certaine mesure, J. Bardey Rosser, l'entreprise logiciste des *Principia mathematica* n'a pas eu de grands continuateurs directs, le formalisme est devenu, sous une forme implicite ou explicite, une tendance dominante en mathématiques et en philosophie des mathématiques. Dans les *Éléments de mathématiques* de Bourbaki*, qui représentent en un certain sens l'aboutissement et le point culminant de cette tendance, le problème du fondement des mathématiques est conçu comme devant être résolu par une combinaison appropriée de la logique symbolique et de la théorie des ensembles axiomatiques.

L'intuitionnisme

L'école intuitionniste a été fondée par Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), mais on peut lui rattacher également comme précurseurs directs des mathématiciens tels que H. Poincaré et Leopold Kronecker (1823-1891). Sur le problème du fondement des mathématiques, les intuitionnistes soutiennent un certain nombre de thèses qui sont directement opposées aux idées des formalistes. Pour eux, la mathématique est avant tout une création mentale qui se fonde sur l'intuition, en particulier l'intuition originaire de la suite des nombres naturels. En tant que telle, contrairement à ce qu'affirme le formalisme, elle est fondamentalement indépendante de tout langage, naturel ou symbolique, le langage ne pouvant lui servir en fin de compte que comme auxiliaire ou comme moyen de communication. L'existence mathématique ne se confond pas avec la simple non-contradiction logique : un objet mathématique ne peut être considéré comme existant que si nous avons le moyen de le *construire* effectivement par une procédure spécifiquement mathématique. Les intuitionnistes sont résolument hostiles à toute utilisation de l'infini actuel en mathématiques et ne donnent pas de sens à des expressions comme l'« ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1 ». Les mathématiques, qui ne dérivent pas de l'expérience, ne sont pas non plus, selon eux, sous la dépendance de la logique : c'est au contraire la logique qui constitue une spécification des mathématiques et doit être

considérée en un certain sens comme de la mathématique appliquée. La logique classique, qui peut être utilisée en toute sécurité aussi longtemps qu'on se meut dans le fini, cesse d'être entièrement valide lorsqu'on considère des univers infinis. C'est ainsi, par exemple, que le principe du tiers exclu est valide dans le cas d'un ensemble fini : si E est un ensemble fini de nombres naturels, on peut décider en un nombre fini d'étapes intuitivement évidentes s'il contient ou non un nombre premier. Mais, si E contient un nombre infini de nombres naturels, l'assertion du fait que E contient un nombre premier ou n'en contient pas ne peut être considérée comme vraie que si l'on peut soit exhiber (ou donner le moyen de construire) un nombre premier qui soit élément de E , soit déduire une impossibilité de l'hypothèse qu'il en existe un. Arend Heyting (né en 1898) a donné en 1930 une axiomatisation de la logique intuitionniste, qui se distingue de la logique dite « classique » par le fait que certaines lois comme celle du tiers exclu $(p \vee \neg p)$ et celle de la double négation $(\neg \neg p \supset p)$ n'y sont pas reçues comme universellement valides.

Lewis

Les « paradoxes » de l'implication matérielle ont amené Clarence Irving Lewis (1883-1964) à rechercher une conception de l'implication qui se rapporte davantage de ce que l'on veut dire lorsqu'on dit qu'une formule A « implique » une formule B . L'*implication stricte* de Lewis (désignée par le symbole « $<$ ») correspond à peu près à la relation de déductibilité logique, en ce sens que, si A et B sont des expressions bien formées, $A < B$ sera vrai si, et seulement si, B est une conséquence logique de A . La première formulation satisfaisante du calcul propositionnel avec implication stricte a été donnée en 1920. Le livre écrit par Lewis en collaboration avec C. H. Langford, *Symbolic Logic* (1932), qui traite la question en détail, est devenu un ouvrage de référence sur la logique modale et le point de départ de la plupart des travaux ultérieurs sur cette question.

Löwenheim

Leopold Löwenheim a démontré en 1915 le théorème célèbre qui porte son nom. On lui doit également un certain nombre d'autres résultats concernant la métathéorie du calcul des prédicats du premier ordre, comme par exemple la démonstration du fait qu'il existe une procédure de décision effective pour le calcul des prédicats du premier ordre à une place d'argument (1915).

Skolem

Thoralf Skolem (1887-1963) a apporté, comme on l'a déjà signalé, une contribution décisive à la constitution de la théorie axiomatique moderne des ensembles. On lui doit en outre une démonstration nouvelle et une généralisation du théorème de Löwenheim, et un certain nombre de résultats en rapport avec le problème de la décision pour le calcul des prédicats du premier ordre. Skolem a démontré que l'on pouvait faire correspondre à toute expression bien formée de ce calcul une forme standard, la *forme normale de Skolem*, qui joue un rôle décisif dans la démonstration de complétude qui a été donnée en 1930 par Gödel pour le calcul en question. Dans un texte fondamental paru en 1923, il a jeté les bases de l'arithmétique récursive, une discipline qui devait connaître par la suite des développements considérables. Il a établi (1933, 1934) l'impossibilité de caractériser complètement la suite des nombres naturels à l'aide d'un nombre fini ou même d'une infinité dénombrable d'axiomes écrits dans la notation du calcul des prédicats du premier ordre avec égalité, c'est-à-dire l'existence de modèles « non standards » pour l'arithmétique du premier ordre.

Post

Emil L. Post (1897-1954) a fourni en 1921 la première étude métathéorique d'envergure sur le calcul propositionnel bivalent présenté sous forme de système formel, avec notamment des démonstrations de

consistance et de complétude. On lui doit également la première formulation d'un calcul propositionnel plurivalent d'un point de vue purement abstrait, c'est-à-dire sans qu'il soit fait référence à une interprétation particulière. Par la suite, Post a apporté une importante contribution à un certain nombre de questions qui ont trait au problème de la décision et à la clarification de la notion d'effectivité.

Łukasiewicz

Jan Łukasiewicz (1878-1956) a proposé en 1920 un calcul propositionnel trivalent en rapport avec la théorie aristotélicienne des futurs contingents. La troisième valeur de vérité correspond approximativement, dans ce calcul, au possible ou au contingent. Par la suite, indépendamment de Post, Łukasiewicz a effectué la généralisation à des calculs plurivalents quelconques (Łukasiewicz, 1929, 1930 ; Łukasiewicz et Tarski, 1930). On lui doit également des travaux importants sur le calcul propositionnel bivalent classique et sur l'histoire de la logique (notamment sur la syllogistique aristotélicienne).

Tarski

Alfred Tarski (né en 1902) a contribué par un grand nombre de publications au développement des recherches sur le calcul propositionnel bi- et plurivalent. Mais ses travaux les plus importants sont certainement ceux qui ont porté, à partir de 1930, sur la métathéorie des systèmes formels en général. Dans ce domaine, Tarski peut être considéré comme le créateur d'une branche nouvelle, la sémantique logique, qui traite de notions comme celles de signification et de vérité en rapport avec des systèmes formels. Dans un texte classique paru en 1936, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, il a résolu le problème qui consiste à trouver pour un système formel S d'un certain type une définition de « vrai dans S » dans un métasystème approprié. Mais l'œuvre de Tarski montre qu'en un certain sens la sémantique peut être réduite à la syntaxe, puisqu'elle fournit la possibilité de trouver, pour un langage formalisé donné, une propriété purement syntaxique des expressions bien formées qui coïncide en extension avec la propriété sémantique d'être une proposition vraie (ou une relation syntaxique qui coïncide en extension avec la relation sémantique qui consiste dans le fait de satisfaire une forme propositionnelle).

Les travaux plus récents de Tarski ont porté notamment sur la théorie des modèles, sur certains domaines qui occupent une position intermédiaire entre la logique et les mathématiques et sur l'application des méthodes et des résultats de la logique moderne à certaines branches particulières des mathématiques. On lui doit en particulier un certain nombre de résultats concernant le problème de la décision dans le cas de l'arithmétique, de la théorie élémentaire des groupes, de l'algèbre et de la géométrie élémentaires.

Carnap

Les travaux de Rudolf Carnap (1891-1970) ont porté plus sur la philosophie de la logique et sur l'application des méthodes de la logique moderne à l'épistémologie et à la philosophie des sciences que sur la logique proprement dite. Son œuvre a une étendue et une importance qui excèdent de beaucoup celles de la contribution qu'il a apportée au développement d'une tendance philosophique particulière

(le néo-positivisme logique). Dans *Der logische Aufbau der Welt* (1928), un ouvrage inspiré directement de Russell et des *Principia mathematica*, Carnap s'était efforcé de mener à bien une reconstruction rationnelle du monde à partir de certaines données fondamentales de l'expérience immédiate en utilisant les techniques de la logique symbolique. Ses travaux sur la métathéorie des systèmes formels commencent avec *Logische Syntax der Sprache* (1934), dont une traduction anglaise augmentée a été publiée en 1937. Carnap y étudie la possibilité d'appliquer à une langue tout à fait quelconque la méthode de traitement purement formel de la syntaxe qui avait été inaugurée par Hilbert dans le cas du langage mathématique. Dans un article publié en 1935, postérieur à l'original polonais (1933), mais antérieur à la version allemande (augmentée d'un important appendice) du *Wahrheitsbegriff* de Tarski, Carnap pose et résout (pour un langage formalisé en fait plus fort que ceux qui avaient été considérés par Tarski) le problème qui consiste à trouver des équivalents syntaxiques pour les notions de vérité d'une proposition et de réalisabilité d'une forme propositionnelle. On trouve un exposé systématique de la sémantique carnapienne dans *Introduction to Semantics* (1942). Dans *Meaning and Necessity* (1947) et dans un certain nombre d'autres publications, Carnap s'est attaqué au problème de la clarification des notions fondamentales de la sémantique et de la logique modale. Il faut signaler également ses travaux sur la logique inductive et la théorie des probabilités, notamment *Logical Foundations of Probability* (1951).

Herbrand

Jacques Herbrand, mort à vingt-trois ans en 1931 dans un accident de montagne, a eu néanmoins le temps d'apporter au développement de la logique mathématique une contribution de tout premier ordre. Celle-ci concerne essentiellement la théorie de la démonstration hilbertienne et la métathéorie du calcul des prédicats du premier ordre. Herbrand a découvert en 1929 un théorème dont Bernays a écrit qu'il était le « théorème central de la logique des prédicats », et qui comporte de nombreuses applications, notamment aux problèmes de décision, de réduction et de consistance. La méthode de Herbrand, qui est contenue en germe dans un certain nombre de mémoires de Löwenheim et de Skolem, consiste à établir une certaine relation entre le problème de la validité d'une formule dans le calcul des prédicats et le problème de la validité (au sens du calcul propositionnel) d'une formule sans quantificateur qui peut être construite à partir d'elle selon des règles déterminées. C'est chez Herbrand que l'on voit apparaître pour la première fois le *théorème de la déduction* (que Tarski déclare cependant avoir connu et utilisé dès 1921), et c'est lui qui a suggéré à Gödel l'interprétation que celui-ci a proposée en 1934 pour la notion de récursivité (le concept de *fonction récursive générale* est désigné fréquemment comme le concept de Herbrand-Gödel-Kleene)

Gentzen

De Gehrard Karl Erich Gentzen (1909-1945), il a déjà été question à propos de la théorie de la démonstration. Dans un mémoire de 1934, Gentzen a établi un *verschärfter Hauptsatz* (théorème principal renforcé) qui est en relation très étroite avec le théorème de Herbrand. Croyant à tort que le théorème de Herbrand ne s'applique qu'à des formules prénexes, Gentzen le considère comme un simple cas particulier du sien. Une meilleure connaissance de l'œuvre de Herbrand permet au contraire de se rendre compte aujourd'hui que c'est le *verschärfter Hauptsatz* de Gentzen qui est en réalité un cas particulier du théorème fondamental de Herbrand. Les recherches de Gentzen dans le domaine de la déduction logique ont porté sur la construction d'un « formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques ». Les méthodes dites « de déduction naturelle » mises au point par Gentzen se distinguent fondamentalement de celles qui sont utilisées dans les logiques que l'on peut appeler *axiomatiques* en ce qu'elles adoptent comme concept central le concept de déduction sous hypothèses et enchaînent non pas directement des propositions, mais bien des raisonnements ou inférences logiques présentés sous forme d'« énoncés de conséquence » (*Sequenzen*). La logique naturelle de Gentzen a donné naissance, par l'intermédiaire de la méthode des « tableaux sémantiques » d'E. W. Beth (1955), à une méthode de démonstration particulièrement élégante et efficace connue et utilisée aujourd'hui largement sous le nom de *méthode des tableaux analytiques* ou *méthode des arbres* (cf. R. M. Smullyan, *First-Order Logic*, 1968).

Gödel

Kurt Gödel a démontré en 1930 la complétude du calcul des prédicats du premier ordre et a provoqué en 1931 une véritable révolution dans l'univers de la logique en établissant l'incomplétude nécessaire de tout système formel suffisamment fort pour exprimer l'arithmétique élémentaire et l'impossibilité d'établir la non-contradiction d'un tel système sans recourir à des moyens plus puissants que ceux dont dispose le système lui-même. Cette découverte capitale a représenté naturellement un coup d'arrêt sérieux pour les entreprises de type formaliste et a ruiné tout espoir de réaliser le programme de Hilbert sous sa forme primitive. Gödel a démontré également en 1940 que, si une certaine axiomatisation de la théorie des ensembles sans l'axiome du choix est consistante, elle le reste lorsqu'on ajoute aux axiomes l'axiome du choix ou l'hypothèse du continu généralisée ou les deux.

Ce résultat a trouvé en quelque sorte son complément dans la démonstration de l'indépendance de l'hypothèse du continu qui a été donnée en 1963 par Paul J. Cohen.

Quelques aperçus sur des développements récents

La première démonstration d'indécidabilité pour le calcul des prédicats du premier ordre a été donnée en 1936 par Alonzo Church (né en 1903). Le problème de la décision a néanmoins été résolu pour toute une série de cas spéciaux dont certains présentent un intérêt considérable. En plus des contributions déjà évoquées antérieurement, il faut indiquer notamment celles de H. Behmann (1922), Bernays et Schönfinkel (1928), Ackermann (1928, 1933), Herbrand (1931), Gödel (1932, 1933), L. Kalmár (1933), K. Schütte (1934), Quine (1944, 1945). Pour un exposé d'ensemble, voir W. Ackermann, *Solvable Cases of the Decision Problem* (1954). D'importants résultats ont été obtenus pendant les dernières décennies sur les problèmes de décidabilité et de réduction dans les domaines les plus divers (Tarski, A. Mostowski et R. M. Robinson [*Undecidable Theories*, 1953], L. Kalmár, J. Suranyi, L. McKinsey, E. M. Post. A. A. Markov, M. Hall, P. S. Novikov, M. O. Rabin, etc.)

L'idée simple de définition récursive d'une fonction telle qu'on la trouve originairement chez Dedekind, Peano et Skolem a été progressivement généralisée et précisée jusqu'à ce que l'on parvienne à un concept susceptible de constituer un équivalent exact pour la notion relativement vague d'« effectivité » ou de « constructivité » en mathématiques. Les travaux décisifs sur cette question ont été effectués essentiellement pendant la période 1930-1940 et sont dus à Gödel, S. C. Kleene, A. Church, A. M. Turing (1912-1954) et Post. (A. A. Markov a fourni en 1951 avec sa théorie des algorithmes une solution nouvelle et équivalente du problème.) En 1936, Church a proposé d'identifier la notion intuitive de « fonction effectivement calculable » avec celle de « fonction récursive générale » au sens défini par Kleene (*General Recursive Functions of Natural Numbers*, 1936). On a pu démontrer qu'un certain nombre d'autres substituts formels proposés pour la notion de calculabilité (comme, par exemple, la λ -définissabilité de Church) étaient équivalents à la notion de récursivité générale. La suggestion de Church (connue sous le nom de *thèse de Church*) a reçu par le fait une certaine confirmation ; mais elle a été attaquée récemment (1957) par Kalmár, et elle est considérée par certains comme peu plausible.

L'attitude des mathématiciens et des logiciens à l'égard du problème de la non-contradiction s'est naturellement considérablement modifiée depuis Gödel. On s'intéresse beaucoup moins aujourd'hui à la question de la consistance absolue qu'aux questions de *consistance relative* : au lieu d'établir qu'un système formel donné S est non contradictoire, absolument parlant, on s'efforcera de montrer plutôt que si un système S est non contradictoire, alors une certaine extension S' de S l'est également. Une démonstration de consistance relative pour un axiome déterminé de ZF est une démonstration du fait que, si le système d'axiomes de ZF sans l'axiome en question est consistant, alors ZF lui-même est consistant. J. von Neumann a montré, par exemple, que l'axiome de régularité était relativement consistant par rapport aux autres axiomes de ZF. Mais le résultat le plus caractéristique et le plus décisif

qui ait été obtenu dans ce domaine est certainement celui de Gödel (1940). Un certain nombre de théorèmes importants sur la consistance relative ont pu être démontrés à propos de différentes formulations de la théorie des ensembles. On a établi, par exemple, que les axiomatisations du type von Neumann-Bernays, qui garantissent l'existence de *classes* aussi bien que d'*ensembles* au sens strict, étaient relativement consistantes par rapport à la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (Ilse Novak [1950], Rosser et Wang [1950], J. R. Shoenfield [1954]).

La méthode des modèles a joué un rôle décisif dans l'obtention de démonstrations de consistance relative pour la théorie des ensembles. La théorie des modèles (en particulier des modèles « non standards ») doit indiscutablement être considérée comme une des branches les plus importantes et les plus fécondes de la logique contemporaine. (Voir, par exemple, *The Theory of Models* [Amsterdam, 1965], sous la direction de J. W. Addison, L. Henkin et A. Tarski.) Il n'est pas possible de citer ici tous les noms importants (Henkin, Tarski, Mostowski, Kemeny, J. B. Rosser et Hao Wang [né en 1921], Shepherdson, Specker, A. Robinson, etc.).

Une autre branche particulièrement importante est représentée par la théorie des fonctions récursives et par l'arithmétique et l'analyse récursives (Kleene, Rózsa Péter, Skolem, Julia Robinson, R. L. Goodstein, H. Hermes, P. Axt, D. Lacombe, etc.).

La clarification des notions de constructivité et de constructivisme occupe une place centrale dans les recherches modernes sur les fondements des mathématiques. L'attitude constructiviste s'exprime de façon particulièrement nette dans la logique « opérative » de P. Lorenzen, qui propose une version libérale de l'intuitionnisme, compatible avec les exigences de l'analyse classique. G. Kreisel s'est intéressé à la fois à l'intuitionnisme et à la notion de constructivité en général (1951-52, 1958).

La logique combinatoire, créée par M. Schönfinkel (1924) et développée par H. B. Curry (cf. Curry et R. Feys, *Combinatory Logic*, 1958), a trouvé ces dernières années un regain d'importance en raison de certains développements récents de la théorie linguistique. Du point de vue théorique, les logiques combinatoires sont intéressantes surtout à cause du jour nouveau qu'elles ont jeté sur le rôle des variables et la notion de substitution dans le symbolisme de la logique mathématique.

Il ne peut naturellement être question ici de considérer de près, du point de vue historique, les développements récents de la logique modale (cf., par exemple, G. E. Hughes et M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, 1968), plurivalente (cf., en particulier, J. B. Rosser et A. R. Turquette, *Many-Valued Logics*, 1952), inductive (voir, par exemple, L. J. Cohen, *The Implications of Induction*, 1970) et déontique (G. H. von Wright), de la théorie des automates et des langages formels, de la mécanisation des procédures logico-mathématiques (cf., par exemple, Hao Wang) et, d'une manière générale, des branches qui font interférer la logique mathématique et la théorie de l'information.

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedia/page/8132>

Quelques biographies complémentaires

Abélard, Aristote, Averroès.

V. les articles.

Boèce (Anicius Manlius Torquatus Severinus Boetius)

[Rome v. 480 - † 524], homme d'État, philosophe et poète latin. Fils d'un consul, il eut pour maîtres Festus et Symmaque, dont il épousa la fille, et compléta son éducation à Athènes. Ce fut lui que le sénat chargea de haranguer Théodoric faisant son entrée dans Rome. Le roi goth l'attacha à sa

personne. Consul et prince du sénat en 510, il vit ses fils élevés à la même dignité en 522. Théodoric lui confia des missions importantes et délicates. Mais, ayant pris la défense du sénateur Albinus, accusé d'entretenir des intelligences avec l'empereur d'Orient, Boèce fut inculpé de haute trahison et de magie, et mourut dans les tortures. Les services qu'il avait rendus à la cause catholique le firent admettre de bonne heure au nombre des martyrs. Le plus célèbre de ses écrits est la *Consolation philosophique*, composée dans sa prison, en prose mêlée de vers, et divisée en cinq livres. Les quatre premiers reproduisent avec éloquence des lieux communs antiques sur la Fortune, la Gloire, le Souverain bien, etc. Le cinquième étudie le problème de la prescience divine et de la liberté humaine. L'ouvrage est inachevé. L'inspiration en est celle de la plus noble sagesse antique.

Bernhard Bolzano

V. analyse.

George Boole.

V. l'article.

Rudolf Carnap

(Wuppertal 1891 - Santa Monica, 1970), philosophe et logicien allemand. Il enseigna la philosophie à Prague (1931) et Chicago (1936). Il est surtout connu par ses travaux de logisticien et par sa place dans l'école néo-positiviste allemande dite « cercle de Vienne* », dont il semble pouvoir être, considéré comme le, chef. Il est l'auteur d'analyses sur la valeur et les fonctions du langage (théorie des *énoncés protocolaires*). Ses principaux ouvrages sont : *Der Raum* (1922), *Der logische Aufbau der Welt* (1928), *Abriss der Logistik* (1929), *Logische Syntax der Sprache* (1934), *le Problème logique de la science* (1935), *Introduction to Semantics* (1942), *Formalization of Logic* (1943), *Meaning and Necessity* (1948), *Logical Foundations of Probability* (1951), *The Continuum of inductive Methods* (1952), *Einführung in die symbolische Logik* (1954), traduit en anglais sous le titre *Introduction to Symbolic Logic and its Applications* (1958), *Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit* (en collab. avec Stegmüller [1959]).

Chrysippe.

V. stoïciens (les).

Augustus De Morgan.

V. algèbre.

Duns Scot.

V. l'article.

Al-Fārābī.

V. Arabes [philosophie arabe].

Gottlob Frege

logique (suite)

(Wismar 1848 - Bad Kleinen, Mecklembourg, 1925), logicien et mathématicien allemand. Il fut professeur à Iéna à partir de 1879. Il a montré les rapports fondamentaux existant entre la logique et les mathématiques, et il a été le premier à élaborer de façon complète un calcul des propositions (opérateurs et quantificateurs) et à distinguer le sens d'une fonction propositionnelle et ce qu'elle désigne. Il a écrit notamment : *Begriffsschrift, Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1879).

Kurt Gödel

(Brünn [auj. Brno] 1906), logicien américain d'origine autrichienne. Il vient aux États-Unis en 1938 et reçoit la nationalité américaine en 1948. Membre de l'Institute for Advanced Study de Princeton, il y est, à partir de 1953, professeur de mathématiques. Il est l'auteur de *Über formal unentscheidbare Sätze der « Principia mathematica » und verwandter Systeme* (1931) et de deux théorèmes, selon lesquels une arithmétique non contradictoire ne saurait former un système complet, car elle comporte nécessairement une formule indécidable (elle ne peut contenir la démonstration formelle de sa propre non-contradiction).

Leibniz.

V. l'article

Jan Łukasiewicz

(Lemberg,auj. Lvov, 1878 - Dublin 1956), logicien et philosophe polonais. Il a été professeur à Lemberg en 1911, puis il est devenu ministre de la culture un certain temps dans le cabinet Paderewski (en 1919). Il a enseigné à Varsovie (1926-1944), puis à Dublin à partir de 1946. Il a écrit plusieurs articles fondamentaux pour l'histoire de la logique, parmi lesquels *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* (1910), *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* (1930), *Die Logik und das Grundlagenproblem* (1941), *A System of modal Logic* (1953).

Raymond Lulle.

V. l'article.

Giuseppe Peano.

V. axiomatique (méthode).

Charles Sanders Peirce

(Cambridge, Massachusetts, 1839 - Milford, Pennsylvanie, 1914), philosophe et savant américain. Il s'appliqua surtout à la chimie et aux sciences mécaniques. Il fut maître de conférences à l'université Harvard (1903) et au Lowell Institute (1903-04). Il a édité et augmenté notablement la *Linear Associative Algebra Studies in Logic* par les membres de l'université Johns Hopkins (1889). Son article *Comment rendre nos idées claires* (1878) est à l'origine du pragmatisme*.

Philon le Mégarique, en gr. Philôn

(seconde moitié du iv^e s. av. J.-C.), philosophe grec, disciple de Diodore. On le surnomma le Dialecticien parce qu'il s'occupa surtout de logique. Zénon de Kytion entendit ses leçons à Athènes.

Pierre de La Ramée.

V. Moyen Âge (philosophie du).

Bertrand Russell.

V. l'article.

Théophraste, en gr. Theophrastos

(Erésos, dans l'île de Lesbos, v. 372 av. J.-C. - Athènes 287), philosophe et savant grec. Il s'appelait en réalité Tyrtamos, mais il fut surnommé par Aristote « Theophrastos » (« le Divin Parleur »). À Athènes, il suivit les leçons de Platon, puis d'Aristote, à qui il succéda en 322 à la direction du Lycée quand le maître dut quitter Athènes pour se réfugier à Chalcis, sous le coup d'une accusation d'impiété. Il s'exila volontairement à son tour en 318, quand Démétrios I^{er} Poliorcète proscrivit les philosophes. Il avait composé un nombre prodigieux d'ouvrages divers (Diogène Laërce en comptait 240), où il commentait Aristote. C'était un érudit très bien informé ; il écrivait avec beaucoup de méthode et de netteté. La plupart de ses ouvrages sont perdus, en particulier un important traité, en vingt-quatre livres, *Sur les lois* ; mais nous avons de lui deux travaux scientifiques complets : *les Recherches sur les plantes*, en neuf livres ; *les Causes des plantes*, en six livres, où il cherche à expliquer par la philosophie d'Aristote les différences entre les espèces. On lit surtout ses *Caractères*, recueil de caractères, ou études morales, que La Bruyère a fort mal traduit et dont il a emprunté le titre.

Ernst Zermelo.

V. ensemble.

→ Algèbre / Axiomatique (méthode) / Axiomatisation et formalisation / Calcul des prédicats / Calcul des propositions / Classe et relation / Logique combinatoire / Logiques modales / Métamathématiques / Systèmes formels / Vienne (cercle de).

K. Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande* (Leipzig, 1855-1870 ; 4 vol. ; rééd., 1927). / C. I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic* (Berkeley, 1918). / F. Enriques, *Per la Storia della logica* (Bologne, 1922 ; trad. fr. *l'Évolution de la logique*, Chiron, 1926). / J. Jörgensen, *A Treatise of Formal Logic*, vol. I : *Historical Development* (Copenhague et Londres, 1931 ; rééd., 1962). / H. Scholz, *Abriss der Geschichte der Logik* (Berlin, 1931 ; trad. fr. *Esquisse d'une histoire de la logique*, Aubier, 1968). / J. M. Bochenski, *Ancient Formal Logic* (Amsterdam, 1951) ; *Formale Logik* (Fribourg et Munich, 1956 ; 2^e éd., 1962). / J. Łukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic, from the Stand-point of Modern Formal Logic* (Oxford, 1951, 2^e éd., 1957 ; trad. fr. *la Syllogistique d'Aristote*, A. Colin, 1972). / P. Boehner, *Medieval Logic, an Outline of its Development from 1250 to 1400* (Manchester, 1952). / B. Mates, *Stoic Logic* (Berkeley, 1953 ; 2^e éd., 1961). / E. A. Moody, *Truth and Consequence in Medieval Logic* (Amsterdam, 1953). / G. Patzig, *Die aristotelische Syllogistik. Logisch-philologische Untersuchungen über das Buch A der « Ersten Analytiken »* (Göttingen, 1959). / W. et M. Kneale, *The Development of Logic* (Oxford, 1962). / N. I. Styazhkin, *From Leibniz to Peano. A Concise History of Mathematical Logic* (en russe, Moscou, 1964 ; trad. angl., Cambridge, Mass., 1968). / T. Kotarbiński, *Leçons sur l'histoire de la logique* (trad. du polonais, P. U. F., 1965, nouv. éd. 1972). / A. Dimitriu, *Histoire de la logique* (en roumain, Bucarest, 1969). / R. Blanché, *la Logique et son histoire, d'Aristote à Russell* (A. Colin, coll. « U », 1971).

logique combinatoire

Partie de la logique mathématique qui a pour objet ses fondements ultimes. C'est une sorte de « protologie ».

Introduction

L'une des façons de caractériser un calcul logique consiste en la donnée d'un système d'axiomes, accompagné de certaines règles. Parmi elles figurent nécessairement des règles de substitution. Dans le cas des systèmes simples, calcul des propositions par exemple (v. calcul des propositions), la formulation des règles de substitution est relativement aisée. Il en va tout autrement dans les systèmes plus complexes, comme dans le calcul des prédicats. En fait, les difficultés y sont telles qu'il a fallu attendre 1935-36 pour en avoir une formulation correcte. Un des obstacles est constitué par la présence de variables au sein des formules logiques et mathématiques.

Si l'on écrit, par exemple, en arithmétique, $x + 0 = x$, on ne communique aucune information sur x , mais seulement sur l'addition et sur zéro. De même, une expression logique comme $p \supset (q \supset p)$ ne renseigne ni sur p ni sur q , mais seulement sur la conditionnelle ($\supset$). On peut donc estimer que l'usage de variables a un caractère assez peu naturel, surtout si l'on est encore amené à distinguer entre variables libres et liées (v. calcul des prédicats). On peut songer en conséquence à s'en passer entièrement. Notons aussi que le passage en mathématiques d'écritures de la forme $y = f(x)$ à la notation des applications $f : E \rightarrow F$ répond à la même préoccupation.

L'une des tâches de la logique combinatoire due à Curry — et d'autres « logiques », comme celle dite « de la λ -conversion », due à Church — est d'élucider ces problèmes de variables et de substitution. Mais ce n'est pas la seule. La découverte des antinomies, et en particulier celle de Russell (v. classe et relation), a réclamé une analyse des diverses catégories que constituent les objets logiques. Il fallait expliquer pourquoi, si $x \in \alpha \equiv . \sim (x \in x)$ peut être considéré comme une

proposition, $\alpha \in \alpha. \equiv \sim (\alpha \in \alpha)$ ne le peut pas. L'étude de ces phénomènes est une autre tâche de la logique combinatoire.

Les combinateurs I, W, K, C, B

Partons d'une expression logique quelconque, par exemple de

$$(1) \quad p \supset (q \supset p),$$

et donnons-nous une règle qui autorise à substituer des expressions bien formées aux variables de propositions.

Alors, en substituant p à q dans (1), on aura

$$(2) \quad p \supset (p \supset p).$$

En substituant $(p \supset p)$ à q dans (1), il vient

$$(3) \quad p \supset ((p \supset p) \supset p).$$

En substituant p à q et q à p dans (1), on a

$$(4) \quad q \supset (p \supset q).$$

D'un point de vue purement extérieur, le passage de (1) à (2) a eu comme effet de supprimer la mention de q ; celui de (1) à (3), de supprimer la mention de q et d'augmenter le nombre des mentions de p ; celui de (1) à (4), de permuter l'ordre des mentions de p et de q . De là l'idée qu'un petit nombre d'opérations tout à fait élémentaires allaient permettre une description et une analyse précises des opérations de substitution.

À chacune de ces opérations élémentaires va correspondre un opérateur bien défini, appelé *combinateur*. Nous allons donner une description intuitive des principaux.

Soit des objets, pour le moment entièrement quelconques, mais dont nous distinguerons certains. Les objets distingués seront des lettres majuscules, les autres des lettres minuscules.

Soit I un premier objet distingué, appelé *identificateur*. Nous poserons que la suite Ia peut se récrire a :

$$\boxed{Ia \longrightarrow a}$$

Soit de même W , appelé *répétiteur*, et tel que :

$$\boxed{Wab \longrightarrow abb}$$

Supposons que m soit la multiplication, x et y des nombres. Alors mxy est une façon de noter le produit de x par y . La chaîne Wmx se récrit mxx et désigne en conséquence le carré de x .

Introduisons K , appelé *éliminateur*, par la condition :

$$\boxed{Kab \longrightarrow a}$$

Comme nos objets sont indéterminés, on pourra avoir par exemple : $KIa \rightarrow I$.

Soit encore C le *permutateur*.

$$Cabc \rightarrow acb$$

En reprenant l'exemple de la multiplication, on aura $Cmxy \rightarrow myx$.

Pour saisir la portée de l'objet B , dit *compositeur*, considérons la fonction numérique $f = \text{df le triple de}$ et $g = \text{df le carré de}$. On aura par exemple :

x	1	2	3	4	5	6	..
$f(x)$	3	6	9	12	15	18	..
$g(x)$	1	4	9	16	25	36	..

Convenons d'écrire simplement fx et gx au lieu de la notation usuelle $f(x)$ et $g(x)$. On aura ainsi : $f4 = 12$, $f6 = 18$, $g2 = 4$, $g6 = 36$, etc.

Mais ici surgit une difficulté. Si $f4 = 12$, on a aussi $4 = g2$. Toutefois, comme f est une fonction à un seul argument, l'écriture $fg2$ n'a pas de sens. Dès lors, pour exprimer l'idée :

f pour la valeur que prend g pour 2,

nous noterons : $f(g2)$. Entourer $g2$ d'une paire de parenthèses revient à obtenir un seul objet. De là le compositeur B :

$$Babc \rightarrow a(bc)$$

On peut écrire : $Bfgx \rightarrow f(gx)$.

En résumé, si l'on considère les combinateurs I , W , K , C , B comme des opérateurs, on peut dire :

COMBINATEUR	NOM	NOMBRE D'ARGUMENTS REQUIS	EFFETS
I	identificateur	1	laisse son argument invariant
W	répétiteur	2	double son second argument
K	éliminateur	2	efface son second argument
C	permutateur	3	permuté ses 2 ^e et 3 ^e arguments
B	compositeur	3	lie ses 2 ^e et 3 ^e arguments

AfficherImage 1 sur 1

On peut noter que les combinateurs ci-dessus laissent tous leur premier argument invariant. On les dit *normaux*.

Il est clair qu'un combinateur, appliqué à un nombre d'arguments inférieur à celui qui est requis, n'a pas d'« effet » : nous ne savons pas récrire la chaîne Ka . En revanche, nous allons postuler que les règles de réécriture restent valables indépendamment des objets qui suivent ou qui précèdent.

Exemples.

1. $Wabcd \rightarrow abbcd$;

2. $CIab \rightarrow Iba \rightarrow ba$.

Soit X et Y deux combinateurs. Disons qu'ils sont *égaux*, et notons $X = Y$, s'ils ont le même effet.

Ainsi, $I = WK$, puisqu'on a

$Ia \rightarrow a$ et $WKa \rightarrow Kaa \rightarrow a$.

Si l'on pose $T = \text{df } CI$, l'exemple 2 montre qu'il existe des combinateurs non normaux.

logique combinatoire (suite)

Introduisons un combinateur S , tel que

$$Sabc \rightarrow ac(bc)$$

A lui seul, S a trois « effets » : il double un de ses arguments (c), il permute l'ordre (c est récrit avant b) et il compose deux arguments. Il est donc plausible que tous les combinateurs introduits plus haut puissent se définir à l'aide de S et K seulement. Vérifions la chose, tout en notant que nous convenons de supprimer toute paire de parenthèses qui vient se situer en tête d'une chaîne ou en tête d'une sous-chaîne.

$I = SKK$.

En effet :

$SKKa \rightarrow Ka(Ka) \rightarrow a$.

$W = SS(SK)$.

En effet :

$SS(SK)ab \rightarrow Sa(SKa)b \rightarrow ab(SKab) \rightarrow abKb(ab) \rightarrow abb$.

$B = S(KS)K$.

En effet :

$S(KS)Kabc \rightarrow KSa(Ka)bc \rightarrow S(Ka)bc \rightarrow Kac(bc) \rightarrow a(bc)$.

$C = S(BBS)(KK)$.

$$\begin{aligned} S(BBS)(KK)abc &\rightarrow BBSa(KKa)bc \\ &\rightarrow B(Sa)(KKa)bc \rightarrow Sa(KKab)c \\ &\rightarrow ac(KKabc) \rightarrow ac(Kbc) \rightarrow acb. \end{aligned}$$

En effet :

Une axiomatisation de la théorie des combinateurs peut donc se faire à l'aide de S et K pris comme primitifs.

Il est naturel de se demander s'il n'est pas possible de réitérer l'effet d'un combinateur. Le problème a une solution simple dans le cas des combinateurs normaux.

Soit à trouver X tel que $Xab \rightarrow abbb$.

Si l'on applique W à abb , on aura la chaîne souhaitée : $Wabb \rightarrow abbb$. Toutefois, si on réapplique W à $Wabb$, on obtient $WWabb \rightarrow Waabb$, ce qui n'est pas l'effet désiré. Cela découle de ce que W agit sur son deuxième argument. Si l'on avait $(Wa)b$ au lieu de Wab , il viendrait :

$W(Wa)b \rightarrow Wabb \rightarrow abbb$.

Il suffit donc, avant d'utiliser de nouveau W , de lier Wa par B . On aura donc : $X = BW$.

En effet : $BWWab \rightarrow W(Wa)b \rightarrow Wabb \rightarrow abbb$.

On est ainsi conduit à définir la notion de *puissance d'un quantificateur* de la façon suivante : si X et Y sont deux combinateurs normaux, alors

$X.Y = \text{df } BXY$;

$X^1 = \text{df } X$;

$X^2 = \text{df } X.X$;

$X^3 = \text{df } X^2.X$; etc.

On peut donc écrire : $W^2 = \text{df } BWW$.

On voit que :

$I^n = I$;

W^n répète n fois le 2^e argument, qui est donc écrit $n + 1$ fois ;

K^n supprime n arguments à partir du 2^e (lui compris) ;

$$C^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ est pair;} \\ C & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

B^n lie n arguments au 2^e, donc on place $n + 1$ entre parenthèses.

Exemples

1. $K^3 abcdef \rightarrow aef$.

En effet, on a par les définitions :

$$K^3 = K^2.K = (K.K).K = (BKK).K = B(BKK)K.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} B(BKK) K abcdef &\rightarrow BKK(Ka) bcdef \rightarrow K(K(Ka)) bcdef \\ &\rightarrow K(Ka) cdef \rightarrow K adef \rightarrow aef. \end{aligned}$$

On remarquera que les parenthèses qui ne sont pas en tête doivent être conservées.

2. $(K^3.W^2) abcdef \rightarrow aeef$.

En effet : $K^3.W^2 = BK^3W^2$. Donc

$$BK^3W^2 abcdef \rightarrow K^3(W^2a) bcdef \rightarrow W^2 aef \rightarrow aeef.$$

On notera la commodité de l'opération produit (marquée par un point) : les combinateurs agissent successivement. Ainsi, on a la chaîne $abcdef$. On fait agir K^3 et on obtient la chaîne aef , sur laquelle on fait agir W^2 .

Il reste à examiner comment faire agir un combinateur donné à distance, c'est-à-dire après la deuxième place. Toujours dans le cas des combinateurs normaux, autre que I , on voit que c'est encore B et ses puissances qui offrent une solution. En effet, si X est normal, on peut écrire :

$$XX_1X_2\dots X_n \rightarrow x_1y_1y_2\dots y_m.$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} BXx_1x_2\dots x_n &\rightarrow \\ X(x_1x_2)x_3x_4\dots x_n & \\ &\rightarrow x_1x_2z_1z_2\dots z_k. \end{aligned}$$

En conséquence, B^iX fait agir X à partir de son $(i + 2)^{\text{e}}$ argument.

Exemple.

$$B^3K^2 \text{ chatte} \rightarrow \text{chat}.$$

En effet :

$$B^3 = B^2.B = (B.B).B = B(B.B)B = B(BBB)B.$$

$$\text{Donc : } B^3K^2 = B(BBB)BK^2.$$

Et il vient :

$$\begin{aligned} B(BBB)BK^2 \text{ chatte} &\rightarrow BBB(BK^2) \text{ chatte} \rightarrow B(B(BK^2)) \text{ chatte} \rightarrow B(BK^2) (\text{ch})\text{atte}. \\ &\rightarrow BK^2(\text{cha})\text{tte} \rightarrow K^2(\text{cha})\text{te} \rightarrow \text{chat}. \end{aligned}$$

On conçoit que de tels mécanismes permettent de rendre compte des substitutions. Voyons, par exemple, comment passer de l'expression (1) $p \supset (q \supset p)$ à l'expression obtenue en substituant $(p \supset p)$ à q , soit à (2) $p \supset ((p \supset p) \supset p)$.

Commençons par éviter les parenthèses dans ces deux formules et posons que, d'une façon générale, $\alpha \supset \beta$ se notera : $c \alpha \beta$. On aura donc

(1) $cpcqp$ et (2) $cpccppp$.

Les minuscules sont assimilées à nos objets et le problème se ramène à trouver un combinateur X tel que

$Xcpcqp \rightarrow cpccppp$.

Il est possible de prendre $X = B^2K.BW.B^2W^2$, par exemple, mais la solution n'est pas unique. Nous avons, en effet, la chaîne initiale $cpcqp$. Appliquons B^2K , qui supprime le 4^e argument. On trouve $cpcp$. Appliquons BW , qui répète le 3^e argument. On a $cpccp$. Si on applique enfin B^2W^2 , qui répète deux fois le 4^e argument, on trouve $cpccppp$, ce qui est le résultat de la substitution.

La fonctionnalité

Admettons que les objets que l'on veut étudier se répartissent en diverses *catégories* : α, β, γ , etc. Si l'objet x appartient à la catégorie α , nous écrirons $x \in \alpha$. Soit alors un opérateur binaire entre catégories, noté F et lu « flèche ». Nous poserons la règle unique :

si $ab \in \alpha$ et $b \in \beta$, alors $a \in F\beta\alpha$,

qu'il est possible d'écrire plus commodément sous la forme :

$$ab \in \alpha \prec \begin{matrix} b \in \beta \\ a \in F\beta\alpha. \end{matrix}$$

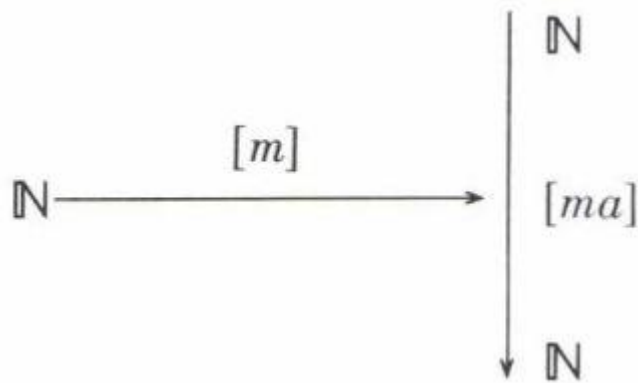
Cela signifie que, si la chaîne ab appartient à la catégorie α et b à la catégorie β , a appartient à la nouvelle catégorie $F\beta\alpha$.

Exemple.

Si a et b sont deux nombres naturels, leur produit, que nous noterons encore mab , est un nombre naturel. À quelle catégorie appartient l'opérateur m ? Soit $\mathbb{N}$ la catégorie des nombres naturels. Une double application de la règle ci-dessus donne :

$$mab \in \mathbb{N} \prec \begin{matrix} b \in \mathbb{N} \\ ma \in F\mathbb{N}\mathbb{N} \end{matrix} \prec \begin{matrix} a \in \mathbb{N} \\ m \in F\mathbb{N}F\mathbb{N}\mathbb{N}. \end{matrix}$$

Si l'on note $[x]$ la catégorie à laquelle appartient en particulier x , on a :



C'est-à-dire que, si $a, b, mab \in \mathbb{N}$, alors $ma \in F\mathbb{N}\mathbb{N}$ et $m \in F\mathbb{N}F\mathbb{N}\mathbb{N}$.

Pour appliquer ce genre d'analyse à la logique, donnons-nous deux catégories primitives : celle des *objets* ω et celle des *propositions* π . Si x_1 est un objet et si a est un prédicat à une place (propriété), ax_1 est une proposition (v. calcul des prédicats). La règle ci-dessus nous permet d'écrire :

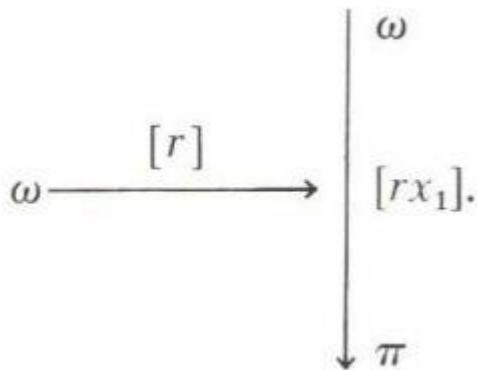
$$ax_1 \in \pi \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 \in \omega \\ a \in F\omega\pi. \end{array}$$

Un prédicat unaire appartient à la catégorie « flèche de ω à π » :

$$\omega \xrightarrow{[a]} \pi.$$

En d'autres termes, un prédicat unaire est ce qui, appliqué à un objet, engendre une proposition.

Un prédicat binaire r (une relation) donne lieu à l'analyse représentée par le schéma :



Exemple.

$rx_1x_2 = \text{df } x_1 \text{ est plus petit que } x_2$.

Dès lors rx_1 , soit « x_1 est plus petit que », appartient à la catégorie $F\omega\pi$, donc à la catégorie des propriétés, et r à la catégorie $F\omega F\omega\pi$, soit à la catégorie des relations (binaires).

Si l'on veut exprimer que la relation r est asymétrique, on pourra noter $\text{Asym } r$ (v. classe et relation) et on aura :

$$\text{Asym } r \in \pi \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} r \in F\omega F\omega\pi \\ \text{Asym} \in F(F\omega F\omega\pi)\pi. \end{array}$$

On voit intuitivement par ces quelques exemples que l'opérateur F permet de répartir en catégories tous les « objets » qui figurent dans les calculs logiques.

logique combinatoire (suite)

Remarque

Certains, et Bar-Hillel en particulier, ont appliqué ce type d'analyse à l'étude des catégories grammaticales des langues.

Revenons à des catégories quelconques α, β, γ et analysons les combinateurs K, S et C . On a $Kab \rightarrow a$. Il est raisonnable d'admettre que Kab et l'expression réduite a appartiennent à la même catégorie, disons α . Posons que $b \in \beta$. On a :

$$Kab \in \alpha \begin{cases} b \in \beta \\ Ka \in F\beta\alpha \end{cases} \begin{cases} a \in \alpha \\ K \in F\alpha F\beta\alpha. \end{cases}$$

$Sabc \rightarrow ac(bc)$. Posons $Sabc, ac(bc) \in \alpha$, $(bc) \in \beta$ et $c \in \gamma$. On aura d'une part :

$$ac(bc) \in \alpha \begin{cases} (bc) \in \beta \\ ac \in F\beta\alpha \end{cases} \begin{cases} c \in \gamma \\ b \in F\gamma\beta \end{cases} \begin{cases} c \in \gamma \\ a \in F\gamma F\beta\alpha. \end{cases}$$

D'autre part :

$$Sabc \in \alpha \begin{cases} c \in \gamma \\ Sab \in F\gamma\alpha \end{cases} \begin{cases} b \in F\gamma\beta \\ Sa \in F(F\gamma\beta)(F\gamma\alpha) \end{cases} \begin{cases} a \in F\gamma F\beta\alpha \\ S \in F(F\gamma F\beta\alpha) \end{cases}$$

(les parenthèses sont introduites pour faciliter la lecture).

$Cabc \rightarrow acb$. On obtient $C \in F(F\beta F\gamma\alpha)(F\gamma F\beta\alpha)$ en posant $Cabc, acb \in \alpha$, $c \in \beta$ et $b \in \gamma$.

Convenons d'écrire $\alpha \supset \beta$ au lieu de $F\alpha\beta$. Ecrivons sous cette nouvelle forme les catégories auxquelles appartiennent K, S et C .

[K] $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$;

[S] $\gamma \supset (\beta \supset \alpha)$, $\supset$, $(\gamma \supset \beta)(\gamma \supset \alpha)$;

[C] $\beta \supset (\gamma \supset \alpha)$, $\supset$, $\gamma \supset (\beta \supset \alpha)$.

Si l'on interprète les catégories comme des variables de propositions et $\supset$ comme la conditionnelle. [K] et [S] suffisent comme axiomes pour la logique de l'implication absolue, comme les

combinateurs K et S suffisent à l'axiomatisation de la logique combinatoire. Quant à $[C]$, c'est une des lois bien connues de l'exportation.

Tout ceci est une esquisse de la façon dont la logique combinatoire constitue une sorte de protologique.

J.-B. G.

P. C. Rosenbloom, *The Elements of Mathematical Logic* (New York, 1950). / Y. Bar-Hillel, *Language and Information. Selected Essays on their Theory and Application* (Reading, Mass., et Jérusalem, 1954 ; nouv. éd., 1964). / H. B. Curry et R. Feys, *Combinatory Logic* (Amsterdam, 1958).

logiques modales

Les logiques modales considèrent les propositions non seulement comme vraies ou fausses, mais encore comme nécessaires, contingentes, possibles, impossibles (modalités aléthiques). D'autres systèmes prennent en considération des modalités comme « il faut que », « il est permis de » (modalités déontiques).

Conditions initiales

En tant que système formel, une logique modale introduira un certain nombre de signes qu'il s'agira ensuite d'interpréter. Pour qu'une telle interprétation rende compte de certains aspects des notions intuitives de nécessité, de possibilité, etc., il convient tout d'abord d'explicitier ces dernières.

Ajoutons aux symboles de la logique classique (v. calcul des propositions) les deux opérateurs suivants : $\Box$, qui sera interprété comme l'opérateur de nécessité, de sorte que $\Box p$ s'interprétera par « p est nécessaire », et $\Diamond$, qui sera interprété comme l'opérateur de possibilité et permettra d'interpréter $\Diamond p$ par « p est possible ». Il est alors naturel de requérir au moins les conditions suivantes :

(1) $\vdash \Box p \supset p$, si une proposition est nécessaire, elle est vraie.

(2) $\vdash p \supset \Diamond p$, si une proposition est vraie, elle est possible.

(3) Les réciproques de (1) et (2) ne doivent pas être valides. En effet, admettre, par exemple, que $p \supset \Box p$, reviendrait à poser l'équivalence entre p et $\Box p$ et donc à supprimer toute distinction entre vrai et nécessaire.

(4) En revanche, l'idée de nécessité est généralement liée à celle de loi logique.

On posera donc que si P est un théorème logique, P est une proposition nécessaire : si $\vdash P$, alors $\vdash \Box P$. On notera qu'il s'agit d'une règle (la future règle N) et non d'une formule des calculs.

(5) $\vdash \Box p \equiv \sim \Diamond \sim p$, dire que p est nécessaire équivaut à dire que non- p est impossible.

(6) $\vdash \Diamond p \equiv \sim \Box \sim p$, dire que p est possible équivaut à dire que non- p n'est pas nécessaire.

(7) Enfin, la plupart des systèmes modaux se construisent comme une extension de la logique bivalente classique. Cela signifie que tout théorème de la logique des propositions vraies/fausses est aussi un théorème de la logique modale, sans que naturellement [v. (3)] la réciproque soit vraie.

Il est possible de satisfaire aux sept conditions ci-dessus de multiples façons. Nous allons en envisager quelques-unes en partant d'un système appelé t , dû à Feys (1937) et reconstruit autrement par von Wright (1951) sous le nom de système m .

Le système T

La condition (7) ci-dessus permet de considérer $\vdash$ comme une extension du calcul des propositions. Donnons-nous donc ce qui suit :

Symboles primitifs

Variables de propositions : $p, q, m, \dots$,

Opérateurs unaires : $\sim, \Box$;

Opérateur binaire : $\supset$.

Nous introduirons des parenthèses en les utilisant de manière intuitive.

Expressions bien formées (ebf)

Il suffit d'ajouter, aux clauses inductives du calcul des propositions, la clause :

(2') Si P est une ebf, $\Box P$ est une ebf.

Cela signifie que $\sim p, \Box \sim p, \Box (p \supset q)$, par exemple, sont des ebf.

Définitions abrégatives

Outre celles de $\wedge, \vee$ et $\equiv$, nous poserons :

$\Diamond P = \text{df } \sim \Box \sim P$, conformément à la condition (6), et $P < Q = \text{df } \Box (P \supset Q)$.

Le signe $<$ est celui de la *conditionnelle stricte*. Il signifie que l'on a non seulement « si P alors Q », mais « nécessairement : si P alors Q ».

Axiomes

Un système d'axiomes pour le calcul des propositions est par exemple :

$a_1 p \supset (q \supset p)$;

$a_2 (p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$;

$a_3 (\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p)$;

auquel on adjoindra les deux axiomes suivants :

$a_4 \Box p \supset p$, conformément à la condition (1) ;

$a_5 \Box (p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$.

L'axiome a_5 pourrait aussi s'écrire $(p \prec q) \supset (\Box p \supset \Box q)$.

Il signifie que, en présence de la conditionnelle stricte entre p et q , si p est nécessaire, q l'est aussi.

Règles de déduction

- Règle de substitution. Dans un théorème, la substitution d'une ebf à chaque mention d'une variable de proposition fournit un théorème.
- Règle du « modus ponens ». Si P et $P \supset Q$ sont des théorèmes, Q est un théorème.
- Règle de la nécessité N. Si P est un théorème, $\Box P$ est un théorème.

Les deux premières règles appartiennent au calcul classique des propositions, la troisième, proprement modale, correspond à la condition (4).

Les théorèmes de $\vdash$ seront toutes les ebf déductibles des axiomes par ces trois règles.

Exemple. $\vdash p \Diamond p$

1. $\Box \sim p \supset \sim p$	a_4 , substitution de $\sim p$ à p
2. $\sim \sim p \supset \sim \Box \sim p$	1, loi du calcul des propositions
3. $p \supset \sim \Box \sim p$	2, <i>idem</i>
4. $p \supset \Diamond p$	3, définition de $\Diamond$

Il existe une analogie formelle entre les propriétés de $\Diamond$ d'une part et celles de $\forall$ et $\exists$ de l'autre (v. calcul des prédicats). Ainsi a-t-on par exemple dans $\vdash$:

$\vdash \Box \sim p \equiv \sim \Diamond p$	comme	$\vdash (\forall x) \sim ax \equiv \sim (\exists x) ax$
$\vdash \sim \Box p \equiv \Diamond \sim p$	comme	$\vdash \sim (\forall x) ax \equiv (\exists x) \sim ax$

On a de même :

$\vdash \Box (p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$	$\vdash \Diamond (p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$
$\vdash (\Box p \vee \Box q) \supset \Box (p \vee q)$	$\vdash \Diamond (p \wedge q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

Ces lois montrent bien que la nécessité dont il est ici question est de nature logique. Ce serait un autre problème que de chercher à rendre compte de la nécessité que l'on attribue parfois aux lois de la nature ou de celle dont on fait usage dans des formules comme « il faut que je m'en aille ».

logiques modales (suite)

Une autre question se présente. La définition des ebf permet de réitérer les modalités, de sorte que $\Box \Box p$, $\Box \Box \Box p$, $\sim \Box \sim \Box p$, c'est-à-dire $\Box \Diamond p$, etc., sont bien formées. On peut douter qu'il soit « naturel » de distinguer « p est nécessaire » de « il est nécessaire que p soit nécessaire ». On

pourrait donc souhaiter avoir une loi de réduction : $\Box \Box p \equiv \Box p$. Or, si $\Box \Box p \supset \Box p$ est bien un théorème de t , la réciproque ne l'est pas. Il en résulte que t contient une infinité de modalités différentes.

On démontre enfin que t est consistant par rapport à la négation, donc qu'on ne peut y démontrer simultanément une expression de la forme P et une expression de la forme $\sim P$.

La réduction des modalités

Réduire le nombre des modalités de t exige l'introduction d'axiomes supplémentaires. Voici deux façons d'y parvenir.

Le système S4

Ajoutons aux axiomes de t l'axiome

$$a6 \quad \Box p \supset \Box \Box p$$

On obtient un système appelé $s4$ dans la terminologie classique depuis Lewis-Langford (1932). C'est un système lui aussi consistant et qui est caractérisé par une famille de théorèmes de réduction :

$$\begin{array}{ll} \vdash \Box \Box p \equiv \Box p; & \vdash \Diamond \Diamond p \equiv \Diamond p; \\ \vdash \Box \Diamond p \equiv \Box \Diamond \Box \Diamond p; & \vdash \Diamond \Box p \equiv \Diamond \Box \Diamond \Box p. \end{array}$$

Ces théorèmes permettent de ne considérer qu'un nombre fini de modalités, en ce sens qu'une proposition comme $\Box \Box p$, par exemple, est équivalente à la proposition $\Box p$.

Pour déterminer ce nombre, notons qu'une modalité se présente comme une suite de signes $\Box$ et $\sim$ et que — grâce à des théorèmes qui figurent déjà dans t — on peut toujours s'arranger pour avoir au plus un signe $\sim$ immédiatement avant p . Ainsi, par exemple :

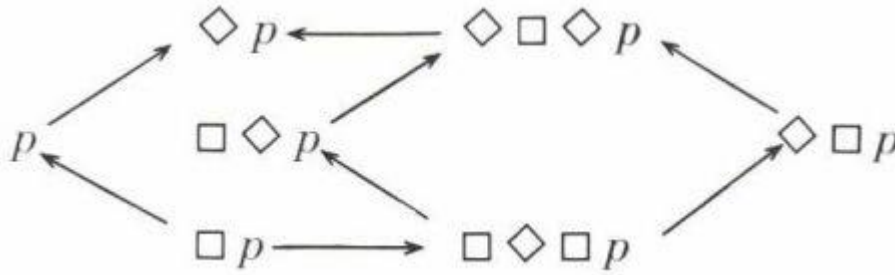
$$\begin{array}{l} \sim \Box \Box \sim p \leftrightarrow \sim \Box \sim p \leftrightarrow \\ \Box \sim \sim p \leftrightarrow \Box \sim p. \end{array}$$

Les deux premiers théorèmes permettent ensuite de ne jamais écrire deux $\Box$ (deux) à la suite l'un de l'autre, et les deux autres de ne jamais écrire plus d'un groupe $\Box$ ou $\Diamond$ de suite. Il reste alors la double liste suivante :

$$\begin{array}{l} p, \Box p, \Box \Box p, \Box \Box \Box p; \\ \sim p, \Box \sim p, \Box \Box \sim p, \Box \Box \Box \sim p; \end{array}$$

soit 14 modalités : 12 modalités propres et 2 modalités impropres (p et $\sim p$) selon la terminologie reçue.

Il existe d'ailleurs des implications entre elles, représentées ci-dessous par des flèches :



Remarque.

Le système s_4 offre un intérêt mathématique considérable en ce sens qu'il est susceptible d'une interprétation topologique simple. On pourra s'en rendre intuitivement compte en posant les interprétations suivantes :

p s'interprète comme un ensemble X ;

$\Box$ s'interprète comme l'opérateur i : prendre l'intérieur de ;

$\Diamond$ s'interprète comme l'opérateur f : prendre la fermeture de.

Aux implications du diagramme ci-dessus correspondent alors des inclusions d'ensembles.

Il reste que, au niveau des propositions, il peut paraître délicat de donner une signification précise à des expressions comme « il est possible qu'il soit nécessaire que p soit possible », et que l'on peut chercher à réduire encore le nombre des modalités.

Le système S5

Il suffit d'ajouter aux axiomes de s_4 l'axiome $a_7 : \Diamond p \Rightarrow \Box \Diamond p$, pour obtenir le système s_5 , lui aussi consistant. En fait, l'axiome a_7 dispenserait de a_6 , qui figurerait alors comme un théorème. Mais l'important est de noter qu'on a maintenant :

$\vdash \Box p \Rightarrow \Box \Diamond p$ et $\vdash \Diamond p \Leftarrow \Box \Diamond p$.

On aura donc les nouvelles équivalences :

$\Box \Box p \Leftrightarrow \Box p$;

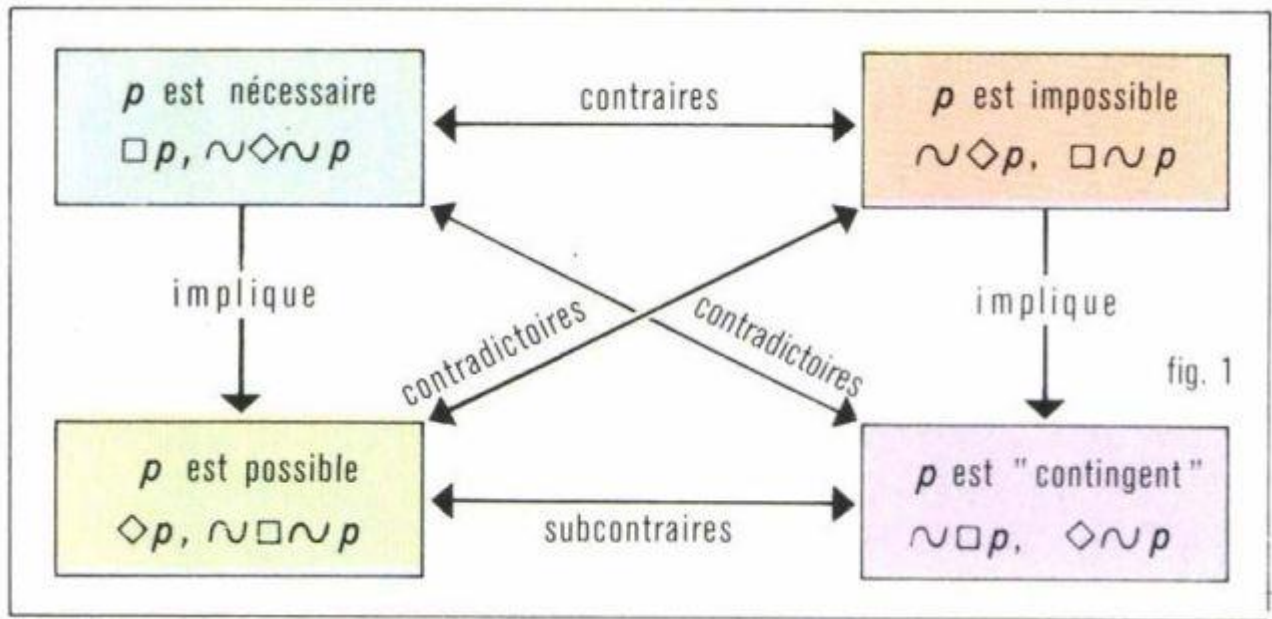
$\Diamond \Diamond p \Leftrightarrow \Diamond p$;

Il ne reste donc plus que 6 modalités : 4 modalités propres ($\Box \Box p$, $\Box \Diamond p$, $\Diamond \Box p$, $\Diamond \Diamond p$) et les 2 modalités impropres.

Le système s_5 est celui qui semble le plus proche des modalités aristotéliennes. Il satisfait en tout cas au *carré des oppositions* (v. syllogisme).

Disons que deux propositions P et Q sont *contraires* si elles ne peuvent être vraies ensemble, sont *subcontraires* si elles ne peuvent pas être fausses ensemble, sont *contradictaires* si elles ne peuvent être ni vraies ni fausses ensemble.

On aura alors le schéma de la figure 1.



AfficherImage 1 sur 1

Nous avons mis « contingent » entre guillemets, dans la mesure où l'idée naïve de non-nécessité ne cadre pas toujours avec celle de contingence.

L'implication stricte

Ainsi qu'on a pu le constater, l'introduction des modalités permet d'envisager deux types de conditionnelles : $\supset$ et $\prec$, et donc deux sortes d'implication : l'*implication matérielle* $\vdash P \supset Q$ et l'*implication stricte* $\vdash P \prec Q$.

La recherche d'une implication plus contraignante que l'implication matérielle a donné lieu à de nombreux travaux, dont le point de départ se trouve chez Lewis-Langford déjà cités.

Considérons les deux théorèmes classiques suivants :

$$(1) \vdash p \supset (q \supset p); \quad (2) \vdash \sim p \supset (p \supset q).$$

La table de vérité de $\supset$ (v. calcul des propositions) montre que, dans le cas de (1), il suffit que p soit vraie pour que, quelle que soit la valeur de q (vraie ou fausse), la proposition $q \supset p$ soit vraie ; (1) pose donc, comme on le dit parfois, qu'une proposition vraie est impliquée par n'importe quelle autre proposition. Une analyse semblable conduit à dire que (2) pose qu'une proposition fausse implique n'importe quelle autre, même vraie.

On a vu dans ces théorèmes des *paradoxes de l'implication matérielle*. En fait, ils ne sauraient être paradoxaux que relativement à l'idée naïve que l'on se fait de la relation « implique », laquelle ne tient certainement pas compte uniquement des valeurs de vérité des propositions en jeu, comme le font les tables de vérité.

Poser $p \supset q$ revient, en logique classique, à poser qu'on n'a pas simultanément p vraie et q fausse, de sorte qu'on pourrait écrire : $p \supset q = \text{df } \sim (p \wedge \sim q)$.

logiques modales (suite)

Afin de tenter de remédier à cet état de choses, il est possible de renoncer à l'idée que la valeur de vérité d'une proposition composée est seulement fonction des valeurs de vérité de ses composantes (point de vue de l'*extension*), et d'introduire un lien plus exigeant en posant : $p < q = \text{df } \Diamond (p \wedge \sim q)$. On ne relie p à q par un lien d'implication que s'il est *impossible* d'avoir simultanément p vraie et q fausse.

On peut alors construire un système de l'implication stricte en prenant pour seuls symboles primitifs les variables de propositions, les opérateurs unaires $\Diamond$ et l'opérateur binaire $\wedge$. On construit l'ensemble des ebf. On pose enfin les définitions usuelles pour $\vee$, $\supset$ et $\equiv$, et de plus :

$$\begin{aligned} P < Q &= \text{df } \sim \Diamond (P \wedge \sim Q); \\ P \times Q &= \text{df } (P < Q) \wedge (Q < P); \\ \Box P &= \text{df } \sim \Diamond \sim P. \end{aligned}$$

Axiomes

$$as1 \ (p \wedge q) < (q \wedge p) ;$$

$$as2 \ (p \wedge q) < p ;$$

$$as3 \ p < (p \wedge p) ;$$

$$as4 \ (p \wedge (q \wedge r)) < (p \wedge (q \wedge r)) ;$$

$$as5 \ ((p < q) < (q < r)) < (p < r) ;$$

$$as6 \ (p \wedge (p < q)) < q.$$

En introduisant des règles de substitution convenables (substitution d'ebf aux variables de proposition et substitution d'équivalences strictes), une règle qui dit que si P et Q sont des théorèmes, alors $P \wedge Q$ en est un et la règle du détachement pour $<$, c'est-à-dire : si P et $P < Q$ sont des théorèmes, Q est un théorème, on a construit un système connu sous le nom de $s1$.

Si les expressions $p < (q < p)$ et $\sim p < (p < q)$ ne sont *pas* des théorèmes de $s1$, en revanche on a : $\vdash \Box p \supset (q < p)$ et $\Diamond p \supset (p < q)$, qui conservent un aspect paradoxal. Il est vrai qu'il ne concerne pas uniquement l'implication stricte, puisque les formules contiennent le signe $\supset$.

En tant que système modal, $s1$ est contenu en t , c'est-à-dire que tous les théorèmes de $s1$ sont des théorèmes de t , mais pas inversement. On a, en particulier, le théorème $\vdash (p < q) = \Box (p \supset q)$ qui justifie l'usage d'un même signe pour la conditionnelle stricte en $s1$ et en t .

Si l'on rajoute à $s1$ l'axiome suivant :

$$as6 \ (\Diamond (p \wedge q) \supset p),$$

on obtient le système dit « $s2$ ». Il est caractérisé par l'existence d'une règle (la *règle de Becker*) qui dit que, si $P < Q$ est un théorème, alors $\Box P < \Box Q$ en est un. Mais, du point de vue des paradoxes, il contient les théorèmes :

$\vdash \Box p \prec (q \prec p)$ et $\Box \Diamond p \prec (p \prec q)$,
ou *paradoxes de l'implication stricte*, plus gênants encore, s'il y a gêne, que ceux de s1.

s2 est aussi contenu dans t.

Les systèmes modaux s1, s2 comme t ne contiennent pas de théorèmes qui permettent de réduire le nombre des modalités. Ajoutons donc encore l'axiome suivant :

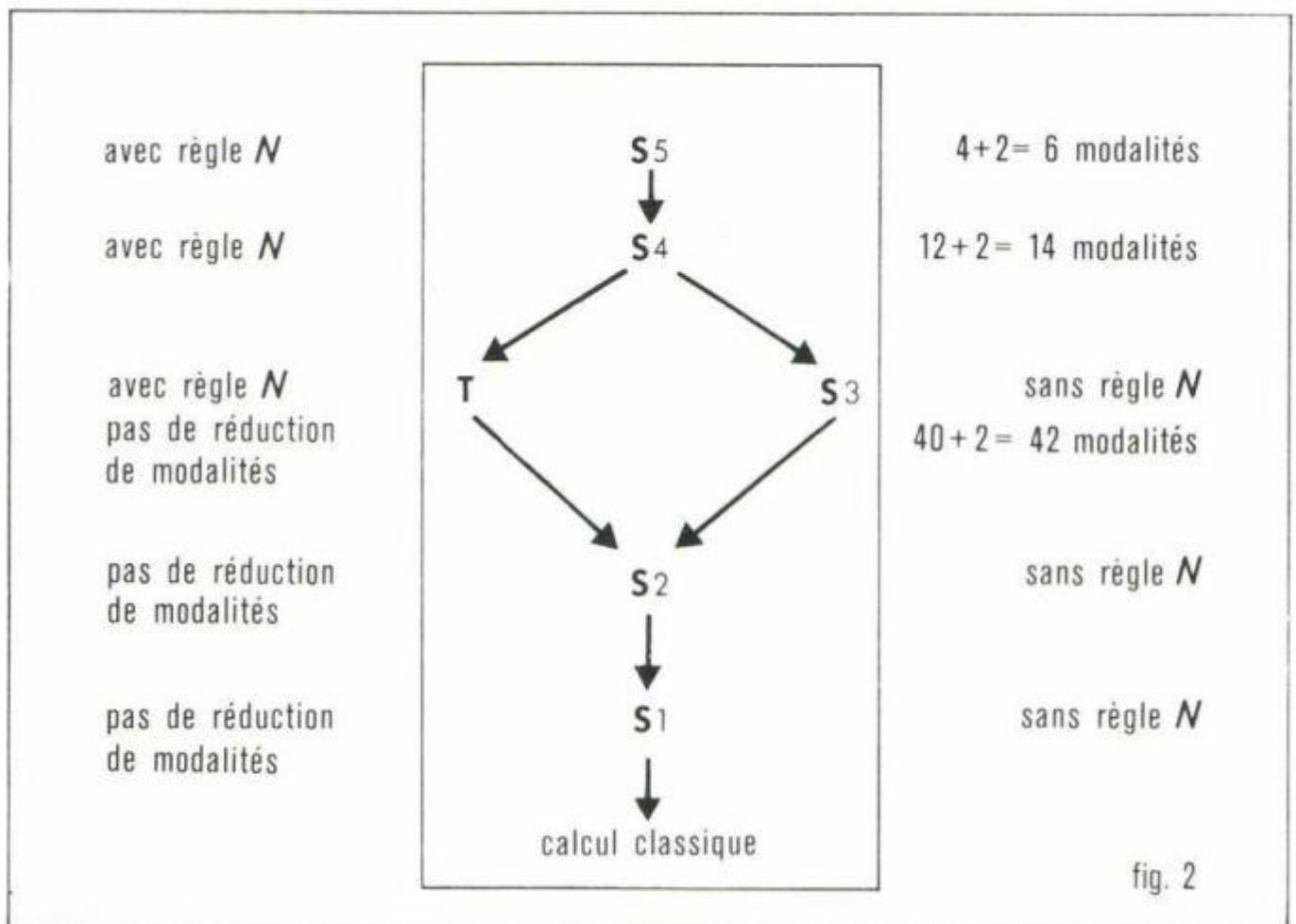
as7 $(p \prec q) \prec (\Diamond q \prec \Diamond p)$.

Il suffit à obtenir le système s3, qui ne contient alors que 42 modalités (40 modalités propres et les 2 modalités impropres). Ainsi construit, s3 contient manifestement s2, mais on montre que s3 n'est plus contenu en t.

L'approche des modalités à travers la recherche d'une implication stricte diffère un peu de celle qui a servi de point de départ à t. En particulier, la nécessité n'y a pas exactement la même signification, en ce sens que la règle N, qui exprimait la condition (4), n'y est universellement valide. Ainsi, dans s1 par exemple, on a seulement que, si P est un théorème du calcul classique des propositions, donc une expression sans $\Box$ et $\Diamond$, alors $\Box P$ est un théorème de s1. Nous sommes donc en présence d'une interprétation de la nécessité plus restrictive qu'en t.

Il est cependant possible de retrouver s4 à partir de s3 en ajoutant l'axiome suivant (qu'il suffirait d'ailleurs d'ajouter à s1) : $\Box \Box p \prec \Box p$.

En résumé, on a la situation représentée par le schéma (fig. 2) dans lequel $X \rightarrow Y$ signifie que le système X contient le système Y .



AfficherImage 1 sur 1

Notons encore que tous ces systèmes peuvent être présentés de multiples façons et qu'ils ne constituent qu'un petit nombre de ceux qui ont été étudiés.

On a construit des systèmes analogues aux s_i , systèmes S°_i , qui ne contiennent pas le théorème $\Box p \supset p$; des systèmes dont aucun théorème n'a la forme $\Box P$; des systèmes qui reposent sur la logique intuitionniste (v. calcul des propositions), etc.

Logiques modales des prédicats

De même que les systèmes précédents prenaient pour base le calcul des propositions, de même il est possible de construire des logiques modales qui partent du calcul des prédicats. On se heurte toutefois à certaines difficultés qui reposent sur le parallélisme que nous avons noté entre les opérateurs $\forall$ et $\exists$ d'une part et $\Box$ et $\Diamond$ de l'autre. En particulier, si l'on ajoute les axiomes modaux de t ($a4$ et $a5$) à un système d'axiomes de la logique des prédicats, on peut facilement prouver le théorème $\vdash \Box (\forall x) ax \supset (\forall x) \Box ax$, mais pas la réciproque, pourtant assez intuitive et connue sous le nom de *formule de Barcan*.

Logiques déontiques

Dans la mesure où l'on peut considérer les systèmes t et s_i comme des systèmes formels, il est possible d'en chercher d'autres interprétations. En particulier, on peut tenter d'interpréter

$\Box p$ comme p est obligatoire ;

$\Diamond p$ comme p est permise.

Il est cependant évident qu'aucun des systèmes précédents n'autorise une telle façon de voir. Tous, en effet, contiennent les deux théorèmes :

$\vdash \Box p \supset p$ et $\vdash p \supset \Diamond p$,

qui signifieraient alors respectivement : « Si p est obligatoire, p est le cas » et « si p est le cas, p est permise ». Ce serait là une vue bien optimiste de la nature humaine ! En revanche, il semble convenable d'accepter le théorème $\vdash \Box p \supset \Diamond p$, soit « ce qui est obligatoire est permis ». On pourrait donc songer à modifier les systèmes aléthiques pour supprimer les deux premiers théorèmes, tout en conservant le troisième.

On n'a là qu'une façon d'aborder la question, et la logique déontique a fait l'objet de nombreuses autres approches.

J.-B. G.

G. H. von Wright, *An Essay in Modal Logic* (La Haye, 1951). / C. I. Lewis et C. H. Langford, *Symbolic Logic* (New York, 1959). / R. Feys, *Modal Logic* (Nauwelaerts, Louvain et Gauthier-Villars, 1965). / G. E. Hughes et M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logics* (Londres, 1968). / G. Kalinowski, *la Logique des normes* (P. U. F., 1972).

Cantor (Georg)

Mathématicien allemand d'origine russe (Saint-Pétersbourg 1845 - Halle 1918).

Issu d'une famille israélite originaire du Portugal, il naît en Russie, où son père, de religion luthérienne, était venu tout enfant de Copenhague. Sa mère, née à Saint-Pétersbourg, appartenait à une famille catholique originaire d'Autriche, qui comprenait de nombreux musiciens. En 1856, ses parents se fixent en Allemagne, et il fréquente alors diverses écoles à Wiesbaden, à Francfort-sur-le-Main et à Darmstadt. En 1862, à Zurich, il s'oriente vers une carrière d'ingénieur, lorsque le goût des sciences abstraites le conduit, en 1863, à l'université de Berlin. En 1867, il soutient sa thèse de doctorat en philosophie, qui, consacrée aux équations indéterminées du second ordre, ne fait nullement pressentir la direction ultérieure de ses travaux. Privatdocent en 1869 à l'université de Halle, à la suite d'une thèse sur les transformations des formes ternaires quadratiques, il est nommé professeur extraordinaire en 1872. C'est alors qu'il est poussé par l'un de ses collègues de l'université, Eduard Heine (1821-1881), à étudier les séries trigonométriques. La même année, au cours d'un voyage en Suisse, il fait la connaissance de Richard Dedekind (1831-1916), avec lequel il se lie d'une solide amitié et entretient une très remarquable correspondance mathématique, où s'éprouvent à peu près toutes les idées fondamentales de la théorie des ensembles*. Ses œuvres originales dans ce domaine débutent par un article en 1873, suivi d'écrits parus de 1878 à 1883, puis de 1895 à 1897. En particulier, la découverte des nombres transfinis est de 1879, date à laquelle Cantor est nommé professeur ordinaire à l'université de Halle. En quelques années, ce sont des découvertes étonnantes, qui parfois déconcertent leur auteur lui-même : notion de la puissance des ensembles abstraits, distinction entre la puissance du dénombrable et celle du continu, début de la topologie, arithmétique des nombres transfinis, etc. Plus tard, David Hilbert (1862-1943) déclarera que l'édifice ainsi élevé par Cantor « représente une des plus belles créations de l'esprit mathématique ». Cependant, ces travaux, par leur nouveauté même, suscitent dès le début la défiance de Karl Weierstrass (1815-1897) et l'hostilité de Leopold Kronecker (1823-1891), qui avaient été à Berlin les maîtres de Cantor. Celui-ci éprouve ainsi des difficultés pour la publication de ses divers articles. Néanmoins, lorsque Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) fonde en 1882 les *Acta mathematica*, il ouvre ses colonnes à Cantor, et, dès le second tome de la nouvelle revue, paraît une traduction française d'un de ses mémoires, faite par des élèves de Charles Hermite (1822-1901). Un mémoire aurait même eu pour traducteur Henri Poincaré (1854-1912). En 1884, l'excès de travail, l'incompréhension des mathématiciens sur la valeur de ses découvertes, les attaques de ses adversaires provoquent chez Cantor une dépression nerveuse qui l'oblige à se réfugier quelque temps dans une clinique. Un peu plus tard, il demande la transformation de sa chaire de mathématiques en chaire de philosophie. Des périodes de santé lui permettent cependant de poursuivre ses travaux, et, à sa mort, tant leur valeur que leur importance sont universellement reconnues.

Cantor (Georg) (suite)

Bien que Kronecker ait traité Cantor de « corrupteur de la jeunesse », deux mémoires de Mittag-Leffler utilisent pour la première fois les notions cantorienne dans des recherches positives. Au congrès des mathématiciens de Zurich en 1897, Jacques Hadamard (1865-1963), Adolf Hurwitz (1859-1919) et David Hilbert rendent hommage au grand novateur. Enfin, publiées en 1898, les *Leçons sur la théorie des fonctions* d'Émile Borel (1871-1956) présentent un exposé partiel de ses idées et en donnent des utilisations désormais classiques.

J. I.

J. Cavaillès, *Philosophie mathématique* (Hermann, 1963).

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedie/page/8705#460103>

Théorie des ensembles

Puis, avec Georg Cantor* (1845-1918), qui établit les bases de la théorie des ensembles, les mathématiques entrent dans une phase nouvelle, caractérisée par la méthode axiomatique et la mise en valeur de la notion de structure.

Les idées ensemblistes auront beaucoup de difficultés à se faire admettre, mais elles trouveront, grâce en particulier à la jeune école française, un champ fertile d'applications dans l'étude des fonctions de la variable réelle. Un des membres les plus brillants de cette école, René Baire (1874-1932), écrit en 1909 : « Le mot *ensemble*, à cause même de sa simplicité et de sa généralité, ne paraît pas susceptible d'une définition précise. Tout au plus peut-on le remplacer par des synonymes, tels que collection, assemblage d'un nombre fini ou infini d'objets, ces objets étant en général des êtres mathématiques de même nature, tels que des nombres, des points de l'espace, des fonctions [...].

Pour des raisons du même ordre, il ne semble pas qu'il y ait lieu de chercher à délimiter à l'avance le domaine qu'on doit comprendre sous le titre général de *théorie des ensembles* ; cela serait d'autant plus difficile que ce titre tend de plus en plus à s'appliquer à des questions très diverses ; et peut-être même s'agit-il moins d'un corps de doctrine isolé que d'une méthode générale dont l'influence pénètre dans les diverses parties des mathématiques. »

Depuis, la théorie des ensembles a pris un développement considérable. Ses parties les plus profondes nécessitent, pour être abordées, une préparation difficile. Son axiomatisation est des plus délicates et s'apparente aux parties les plus abstraites de la logique et des métamathématiques.

Le vocabulaire ensembliste est devenu toutefois le bien commun de tous les mathématiciens, et son introduction dans l'enseignement, même le plus élémentaire, s'est révélée utile.

Deux ensembles ont même puissance s'ils peuvent être liés par une relation bijective. Pour les ensembles finis, ou collections finies, la notion de puissance est la même que celle du nombre des éléments. Mais, pour les ensembles infinis, l'idée de nombre disparaît, et celle de puissance demeure. Très profonde, elle présente les plus grandes difficultés pour l'établissement d'une axiomatique.

Un ensemble, pris dans un sens général, est un objet *a priori* informe qui ne prend quelque consistance qu'une fois structuré. Deux ensembles de même puissance, comme celui des entiers positifs et celui des rationnels positifs, se distinguent l'un de l'autre par leurs propriétés caractéristiques ou ce que l'on appelle leurs *structures*.

Les structures se subdivisent en trois catégories : les *structures algébriques*, les *structures d'ordre* et les *structures topologiques*.

Structures algébriques et structures d'ordre

Parmi les premières figurent les structures de groupe, commutatif ou non, d'anneau, d'idéal d'anneau, de corps, d'espace vectoriel, etc. Les relations d'ordre dérivent d'une part du concept trivial de *plus grand* ou de *plus petit*, qui dominait l'antique notion de grandeur, d'autre part du concept d'*antérieur* et de *postérieur*, lié à l'intuition du temps. Elles se subdivisent en relations d'ordre total et en relations d'ordre partiel. Ces dernières ont donné naissance à la *structure de treillis*. Un *treillis* est un ensemble tel qu'à tout couple d'éléments correspondent deux nouveaux éléments, le plus grand de leurs minorants et le plus petit de leurs majorants. L'ensemble des nombres entiers naturels est un treillis par rapport à la théorie de la divisibilité : à tout couple d'entiers correspondent leur plus grand commun diviseur et leur plus petit commun multiple. La théorie des treillis a été évidemment créée pour l'étude de situations moins banales.

Parmi les diverses relations d'ordre total, Cantor a distingué les bons ordres. Un ensemble est bien ordonné si chacun de ses sous-ensembles possède un premier élément relativement à l'ordre considéré. Ainsi, l'ensemble des nombres entiers positifs est bien ordonné, relativement à l'ordre naturel. L'ensemble des entiers relatifs et celui des nombres rationnels positifs ne sont pas bien ordonnés, si l'on considère ce même ordre naturel ou habituel. Un axiome de la théorie des ensembles qui a amené de nombreuses discussions parmi les mathématiciens du début du siècle est celui qu'Ernst Zermelo (1871-1953) forgea en 1904 pour justifier une affirmation de Cantor : *tout ensemble peut être bien ordonné*.

Structures topologiques

La topologie exploite des notions voisines de la relation d'ordre. On y trouve les idées de sous-ensemble ouvert ou fermé, de voisinage, de sous-ensemble connexe, de point d'accumulation, de limite, etc. Elle a pris naissance surtout dans l'analyse mathématique et plus particulièrement dans l'étude des fonctions de la variable réelle ou complexe, si développée tout au long du *xix^e* s. La *topologie générale* s'est développée entre 1920 et 1940, à la suite des travaux de Maurice Fréchet (1878-1973) et de Félix Hausdorff (1868-1942) ; son rôle est de forger un langage « géométrique » aussi commode et aussi souple que possible pour l'expression des résultats et des problèmes d'analyse fonctionnelle, de géométrie différentielle, etc.

Un cas particulier des espaces topologiques est celui des espaces métriques, historiquement les premiers apparus. Présentant quelques analogies avec l'espace euclidien, qui est leur prototype, ils sont tels qu'à toute paire d'éléments soit associée une « distance », c'est-à-dire un nombre réel positif satisfaisant à l'*inégalité triangulaire* : trois éléments étant considérés, la distance de deux d'entre eux est au plus égale à la somme des distances du troisième à chacun d'eux. C'est l'analyse fonctionnelle du début du siècle qui a introduit les espaces métriques : espaces de Banach, espaces de Hilbert, etc.

<http://www.larousse.fr/archives/grande-encyclopedie/page/8706>

mathématique ou mathématiques (suite)

La recherche mathématique

L'évolution permanente des mathématiques résulte des progrès de la recherche. L'étude toujours plus approfondie tant des grandes branches classiques que des domaines nouveaux pose toujours des problèmes inattendus, dont la résolution s'obtient parfois par utilisation de l'arsenal des outils déjà

inventoriés. Aussi intéressants qu'ils soient, ces problèmes ne sont pas alors essentiels aux progrès de la science, puisqu'ils étaient déjà virtuellement résolus.

Parfois, au contraire, certains problèmes posés soit par les mathématiques elles-mêmes, soit par d'autres parties de la science exigent qu'un nouvel outillage mathématique soit forgé. Les tentatives de résolution sont assez aléatoires. Si elles échouent, le problème reste *ouvert*, et ce cas est assez fréquent. Mais, parfois, se fiant à son intuition, à son flair, le mathématicien créera une « structure nouvelle », à laquelle il donnera évidemment une solide consistance logique. Le nouvel être mathématique se révélera peut-être utile soit pour la résolution du problème posé — ce sera la situation optimale —, soit pour d'autres problèmes qui n'avaient pas été prévus, mais qui se révéleront importants. Un exemple classique de cette situation est la création, vers 1840, par Ernst Eduard Kummer (1810-1893), des *nombres idéaux*, améliorés par Richard Dedekind* (1831-1916) sous la forme des *idéaux d'anneaux*. Kummer avait créé ces nombres pour résoudre le grand théorème de Fermat*, qui reste encore actuellement un problème ouvert. Les idéaux apportaient une solution partielle de ce théorème, mais surtout la nouvelle structure s'est trouvée l'une des plus fécondes dans des branches très diverses des mathématiques.

Enfin, parfois, et c'est le cas le plus défavorable, la nouvelle structure, bien que logiquement viable, ne se révèle applicable dans aucun domaine de la science. Elle est alors purement et simplement abandonnée, quitte à être redécouverte par d'autres chercheurs et, mieux exploitée, à se révéler alors féconde.

Les mathématiques actuelles se trouvent ainsi subdivisées en des domaines distincts de recherche, plus ou moins actifs et dont on peut retrouver la filiation historique : c'est ainsi que la géométrie grecque des courbes a donné naissance au *xvii^e s.*, grâce à Descartes* et par son rattachement à l'algèbre des équations, à la *géométrie analytique*, méthode de recherches qui eut son époque de fécondité, mais qui, à l'heure actuelle, ne sert plus guère qu'à l'enseignement. Toutefois, la *géométrie algébrique* moderne, dont les racines plongent dans cette géométrie analytique, est un domaine des hautes mathématiques aujourd'hui en pleine activité.

En plus de ces subdivisions traditionnelles, on utilise, en mathématique, les diverses structures qui se retrouvent dans des branches fort diverses de la recherche. Elles donnent à cette science son unité profonde et sa fécondité. Leur étude apporte aux chercheurs une économie et une efficacité de pensée qui leur permettent de s'attaquer avec succès à d'anciens problèmes réputés impossibles et d'en soulever de nouveaux dont leurs prédécesseurs ignoraient jusqu'à l'existence, utilisant ainsi dans tout le champ du savoir un outil d'une efficacité sans pareille.

J. I.

→ Algèbre / Analyse / Arithmétique / Axiomatique (méthode) / Ensemble / Géométrie / Logique / Métamathématique / Probabilité.

J. Hadamard, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton, 1945 ; nouv. éd., 1949 ; trad. fr. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Blanchard, 1959). / J. R. Newman, *The World of Mathematics* (New York, 1956 ; 4 vol.). / N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Hermann, 1960 ; nouv. éd., 1969). / E. W. Beth et J. Piaget, *Épistémologie mathématique et psychologie* (P. U. F., 1961). / F. Le Lionnais, *les Grands Courants de la pensée mathématique* (Blanchard, 1962). / J. Cavaillès, *Philosophie mathématique* (Hermann, 1963). / R. Taton (sous la dir. de), *Histoire générale des sciences*, t. IV : *l'Époque contemporaine*, vol. II : *le *xx^e* siècle* (P. U. F., 1964). / A. Warusfel, *Dictionnaire raisonné de mathématiques* (Éd. du Seuil, 1966). / « Épistémologie des mathématiques », in *Logique et connaissance scientifique* sous la dir. de J. Piaget (Gallimard, « Encycl. de la Pléiade », 1967). / L. Chambadal, *Dictionnaire des mathématiques modernes*

(Larousse, 1969 ; nouv. éd., 1972). / J. T. Desanti, *Recherches sur la formation du concept de mesure des ensembles* (Thèse, Paris, 1970 ; 2 vol.). / P. Levy, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Souvenirs mathématiques. Considérations philosophiques* (Blanchard, 1970).

En 2013 exemple de cours proposés pour la logique :

[CA5] Cours avancé de logique

- **Jacques DUBUCS**, directeur de recherche au CNRS ^(TH)

S'il s'agit de l'enseignement principal d'un enseignant, le nom de celui-ci est indiqué en gras.

Cf. calendrier: <http://sapience.dec.ens.fr/cogmaster/calendrier/> du 10 février 2014 au 06 juin 2014

Pré-requis :

Les étudiants doivent être familiers avec la logique classique du premier ordre (calcul propositionnel, calcul des prédicats, etc.)

Description :

Au terme du cours, les étudiants auront acquis les connaissances suivantes:

- a) Une carte générale de la logique, de ses méthodes et de ses applications ;
- b) Des notions précises de théorie de la calculabilité et de la démonstration (machines de Turing, algorithmes, théorèmes d'incomplétude de Gödel) et des rudiments relatifs à la calculabilité "en pratique" (speed-up, complexité) ;
- c) La sémantique des mondes possibles et son usage pour modéliser des situations et des problèmes: formalisation des attitudes propositionnelles, des situations de connaissance dans les groupes (coopération épistémique, common knowledge, annonces publiques) et des conditionnels contrefactuels ;
- d) Les approches formelles de la rationalité: panorama des solutions contemporaines à la question de l'omniscience logique, raisonnement en situation d'incertitude (logique et probabilité, continuum des méthodes inductives), conditionnalisation bayésienne, updating et révision, lien avec la théorie de la décision.

Intervenants :

Jacques Dubucs, Henri Galinon (TD = 18h)

MOTS-CLES : [Sciences cognitives](#),

SUIVI ET VALIDATION POUR LE MASTER : Hebdomadaire semestriel (24 h = 6 ECTS)

MENTIONS & SPECIALITES :

- [Sciences cognitives](#)
(Parcours de spécialisation M₁S₂ M₂S₄)

INTITULES GENERAUX :

RENSEIGNEMENTS : secrétariat du Cogmaster.

NIVEAU REQUIS : ouvert aux étudiants du master de Sciences cognitives (Cogmaster) ; aux doctorants souhaitant valider des séminaires de master dans le cadre de leur thèse ; aux étudiants extérieurs au Cogmaster, sous réserve de compatibilité avec leur cursus d'origine.

SITE WEB : <http://www.cogmaster.net/>