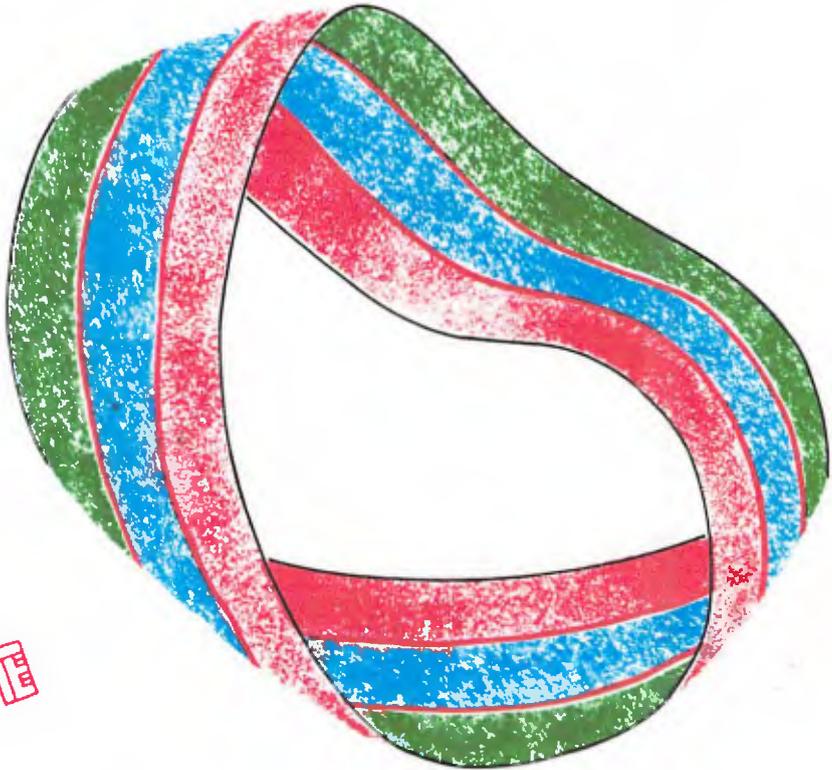


ÉTOFFE

Les surfaces topologiques intrinsèques

JEAN-MICHEL VAPPÉREAU



Topologie En Extension

Fascicule de résultats n ° 2

ÉTOFFE

Les surfaces topologiques intrinsèques

JEAN-MICHEL VAPPEREAU

ÉTOFFE

Les surfaces topologiques intrinsèques

Topologie En Extension

Collection de topologie en extension

© 1988, Jean-Michel Vappereau

ISBN 2-9503050-0-8

à Jean-Claude Terrasson,

*en hommage à son style de présentation
des surfaces topologiques qu'il connaît si bien.*

Ce manuel a été réalisé par un cartel de Topologie En Extension. Autour de Michel Bertheux, il y avait Laurence Descubes, qui a réalisé les dessins avec lui, Jean-Michel Vappereau, qui a conçu l'ouvrage, Jean Trentelivres, qui l'a traité, et Richard Haddad, qui a agacé le cartel de ses remarques candides.

Nous avons commencé dans ce numéro de la série quelques réécritures de certains passages à partir du premier texte de l'un d'entre nous. L'empreinte particulière à chacun ne s'efface pas et s'y trouve liée.

Topologie En Extension

5, rue de l'Abbé-Carton, Paris, 75014
Tél. : 40 44 85 73

Présentation de la série des fascicules de résultats

1. Dans le champ de Freud, nos fascicules de résultats prennent les choses au sérieux, ils font série. La série de nos résultats de topologie en extension s'adresse à ceux qui veulent se frayer une voie dans ce champ, sans en rester pétrifiés d'effroi ou pétris d'indifférence.

Nous empruntons l'expression de "fascicules de résultats" à l'équipe Bourbaki [16]. Les mathématiciens de ce groupe développent la construction des mathématiques à partir des termes de la théorie des ensembles. Dans le mode d'emploi de leur traité qu'ils ont divisé en livres, ils précisent la fonction de ces fascicules:

"A certains Livres (soit publiés, soit en préparation) sont annexés des fascicules de résultats. Ces fascicules contiennent l'essentiel des définitions et des résultats des Livres, mais aucune démonstration."

Leur tentative présente avec la nôtre une distinction qui ne peut prêter à confusion; nos fascicules ne sont annexés à aucun traité d'une envergure comparable.

Par contre, dans notre construction de l'objet de la psychanalyse, à partir du fondement de la théorie des ensembles, nous disposons de l'œuvre de Freud et des écrits de Lacan, ces derniers sont accompagnés de son enseignement de séminaire.

2. La psychanalyse a été inventée par Freud lorsqu'il découvre l'inconscient. Cette invention est achevée par Lacan au travers d'un commentaire critique du texte de Freud, qui le met à l'épreuve de sa propre logique.

Cette pratique s'appuie sur une méthode, elle produit un discours.

La méthode est connue de ceux qui étudient des textes. Elle a reçu ses lettres de noblesse avec Champollion qui l'a déjà employée avec succès. La méthode psychanalytique consiste à comparer deux versions d'un même texte, puisque le discours analytique repose sur l'hypothèse selon laquelle notre appareil psychique s'élabore au travers d'une série de traductions, transcriptions, translittérations.

Nous regroupons ces différents actes sous le terme de traduction, qui est ici à l'étude. Pour recourir à cette méthode, il faut disposer de plusieurs versions du texte étudié. La psychanalyse ne s'applique qu'à un sujet parlant qui fournit lui-même, en un même discours, les

différentes versions d'un même texte (E. pp. 747-748)¹. Ce que l'on appelle sottement psychanalyse appliquée n'est que l'emploi de la méthode psychanalytique, dans la critique littéraire par exemple.

L'étude du problème [25] que pose la traduction culmine dans une pratique de l'écriture que le Docteur Lacan retrouve dans l'écriture de la langue japonaise. Le lecteur peut savoir que le lettré japonais écrit sa propre langue (lecture kun-yomi) par le recours aux caractères qui servaient à écrire un état archaïque de la langue chinoise (lecture on-yomi)² qu'il ne méconnaît pas.



Fig. 1

Ainsi se dit et s'écrit l'élément que nous écrivons eau dans nos contrées. Cette pratique de la lettre appelle de nombreuses remarques. Pour engager la discussion, nous nous contenterons ici de quelques-unes d'entre elles.

Le recours à cette écriture produit un effet de traduction permanente.

Cette traduction s'effectue dans une même culture pour le Japonais lettré. Cela s'éprouve au plus pur en japonais écrit du fait des caractères qui introduisent dans la traduction une autre dimension ; celle-ci est produite par une fiction de trois.

Nous retrouvons cette instance de la lettre dans les Ecrits de Lacan lorsqu'il présente la structure du signifiant grâce au couple d'opposition hommes / dames

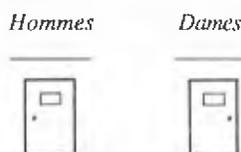


Fig. 2

qui surmonte deux portes identiques, signalant chez nous ces lieux isolés soumis aux lois de la ségrégation urinaire (E. p. 499).

Il y a quelque impertinence à illustrer ainsi la fonction de la lettre, mais c'est pourtant celle-ci qui est présente chez nous, jusque dans notre vie publique, et dont l'articulation paraît comme effacée dans l'écriture alphabétique.

C'est sur le même mode que les éléments cliniques peuvent s'entendre dans la pratique.

Les propos de l'analysant doivent aller jusqu'à rencontrer la structure du champ freudien pour atteindre à la dimension du discours. Cette structure est topologique car le discours analytique s'inscrit dans l'époque d'une science logico-mathématique dont la

1. La lettre E suivie d'un numéro de page renvoie au volume des Ecrits de Jacques Lacan, paru en 1966.

2. Takatsuju Sasaki, «Mettre la psychanalyse en japonais», L'Ane n° 26, pp. 8-9.

topologie vise au fondement. C'est donc par une série de traductions qu'il y a passage de la particularité du cas à l'universalité de ce qui se fonde. Ce geste ne prétend pas nous sortir de ce fantasme mais a la prétention d'en rendre compte.

Il ne s'agit pas d'une abstraction toujours plus désincarnée, comme l'a cru Husserl en ses *Fondements de l'arithmétique*, à propos du concept de chat, mais d'une matérialité littérale, comme le lui rappelle Frege, où le fondement des concepts repose sur l'extension des cas particuliers portée à la dimension de l'ensemble. Le concept de chat n'est pas un chat abstrait auquel a été retiré le poil, les moustaches, les yeux, etc., mais la collection des chats, lorsqu'elle donne lieu à un ensemble selon des conditions précises. Nous parlerons donc de concept, à propos de cette collection, à la condition qu'une lettre, un nom, puissent lui être assignés, et nous dirons alors qu'elle est un ensemble. Cette assignation dépend de contraintes textuelles bien connues en théorie des ensembles, moins aperçues en d'autres domaines³. Ainsi se pose la délicate question du nom propre.

La pratique de la psychanalyse va à l'interprétation du fait de la traduction en s'appuyant sur les dessins ou les mathèmes de la topologie et en ayant recours à la topologie en usage en mathématique, celle-ci ne se prête d'ailleurs pas à une topologie appliquée mais réalise, comme dans la lecture du japonais, un parler bilingue.

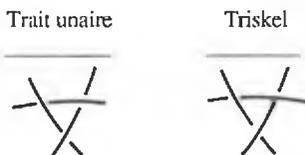


Fig. 3

Nous pourrions multiplier les exemples à propos de chaque concept de la psychanalyse. D'où la nécessité de nos éléments de topologie, car que dire d'un lettré japonais qui méconnaîtrait la lecture *on-yomi* (le chinois ancien) prétendant s'en passer pour écrire de manière univoque la langue japonaise (lecture *kun-yomi*) ?

La conversation courante met à contribution le regard et la voix, la pratique de Freud consiste dans son principe à isoler la voix au détriment du regard dans le traitement psychanalytique lui-même (étape majeure du *training analytique*, E. p. 698). Cette pratique répond à ce qui s'y découvre, les affres du transfert où, dans le jeu des passions, l'ignorance se cache derrière l'amour, parfois derrière la haine. Mais elles doivent, comme nous venons de le dire, être articulées à l'ensemble du *training* qui fait de ce transfert une formation de l'inconscient.

La pratique de Lacan s'inscrit dans cette configuration. Il entreprend de retourner à Freud en effectuant, dans le cas de la pratique elle-même comme à propos de chaque concept, un renversement lent mais radical. Sa pratique de la structure consiste alors à écarter la voix, c'est ce qu'a fait Lacan à l'extrême de son

3. Nons, fascicule n° 0.

parcours, pour condenser l'attention sur le regard, spécialement avec les dessins de topologie. Le moment de bascule de ce renversement, selon la structure du champ freudien, trouve sa réalisation pratique avec les séances courtes. Cette étape, où cette pratique se réduit à une simple coupure, est nécessaire.

Notre trajet n'est pas de rester collé à l'un ou à l'autre des moments de la structure, mais il est de n'en négliger aucun. Notre projet est d'approche de Lacan, approche de Freud, dans le prolongement de ce double mouvement qui reste indépassable — la pratique s'en trouve élargie.

La pratique de la psychanalyse ne vise sans doute pas à produire des mathématiques mais nécessite de ne pas les méconnaître. La formation s'achève, chez l'analysant, par la séparation de l'analyste d'avec de l'analysé dont il se doit de faire le compte rendu. La pratique (la clinique, la structure et l'acte) ne tient pas si l'on esquivé le fondement dogmatique de la traduction, c'est-à-dire de la lecture, de l'inconscient.

Le discours analytique progresse à partir de cette pratique, mais il est déjà là pour nos générations. Ce n'était pas le cas pour Freud, pas encore pour Lacan, ils n'en disposaient pas. Le discours analytique est le lien social qui se forme, du fait de cette pratique, et qui l'accueille avec ses résultats. Où l'on voit que ça ne se fait pas tout seul. Cela commence à partir de deux, appareillés des œuvres de Freud et des écrits de Lacan.

Ces raisons nous conduisent à considérer en préambule la topologie telle qu'elle va être dite comme l'argument du discours. Ce discours, en train de se faire, se présente selon plusieurs versions dans l'œuvre de Freud, plusieurs traductions dans l'enseignement de Lacan. Il nous faut les faire raisonnés par l'emploi de la méthode psychanalytique dont l'apprentissage constitue l'autre étape du training. Cette méthode ne saurait être négligée dans les comptes rendus de l'épreuve, comme elle ne saurait l'être dans les effets internes qu'elle produit.

3. L'œuvre de Freud est divisée en deux topiques, séparées par un moment intermédiaire (1914-1915) où s'affirme la nécessité du passage de la première à la seconde.

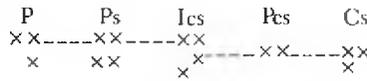
Il y a trois chapitres topologiques dans l'enseignement de Lacan, rapportés à trois types de variétés mathématiques : graphes (1953-1961), surfaces (1961-1971), nœuds (1972-1981). Nous définissons et développons ces notions dans la série de nos résultats.

FREUD

1re topique. Dès la lettre 52 adressée à Fliess [1 b], Freud trace un schéma⁴ qui répond à son hypothèse selon laquelle l'appareil

4. Nous adoptons cette graphie du mot schéma pour désigner nos figures, afin de souligner que non seulement elles montrent, mais aussi veulent faire entendre. Le concours du "shema" (écoute) hébraïque n'est donc pas fortuit. Cela pour donner à

psychique se constitue par traductions successives. Les segments correspondent à des bouleversements par traduction.



Les lettres du graphe de la lettre S2 se lisent ainsi :
 P = Perception, Ps = Perception-signes, Ics = Inconscient,
 Pcs = Préconscient, Cs = Conscience.

Fig. 4

Freud se pose la question de la conjonction des extrémités de ce graphe, du nouage de la perception et de la conscience, où notre "tradition réflexive" "a éprouvé ses étalons de vérité" (E. p. 69). Cette question revient dans La Signifiante des rêves ([1 c], p. 460, note 1) alors qu'il donne une nouvelle version optique de son schéma où chaque étape de traduction est rendue par une lentille qui produit un renversement de l'objet, comme dans une lunette.

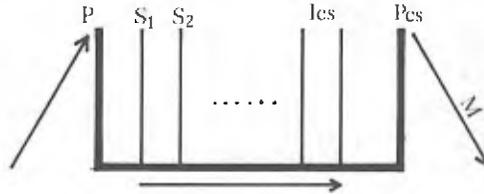


Schéma de la Traumdeutung.

Fig. 5

C'est le problème initial d'où nous ferons partir la topologie du sujet.

Au cours de cette première période, Freud établit le travail de l'inconscient dans les trois ouvrages majeurs que sont La Signifiante des rêves, La Psychopathologie de la vie quotidienne [1 d] et Le Mot d'esprit dans ses rapports avec l'inconscient [1 f].

2e topique. Dans sa seconde topique, Freud interroge la même structure qui revient dans les écueils à éviter du dualisme dans la théorie. A cet effet il introduit, dès 1914, avec le narcissisme, sa théorie du moi. L'autre qui parle au travers des trébuchements de ma parole ne m'est pas symétrique, de même que mon unité ne tient pas à l'unité de mon organisme. Qu'est-ce qui fait un à partir de ce deux ? De même Freud distingue les pulsions sexuelles qui investissent l'objet et les pulsions du moi réputées le conserver. Il reconnaît qu'il s'agit de la même chose [1 k] :

réfléchir, pour interroger et méditer ce que P. Legendre appelle l'opération symbolique de base, la manigance fondamentale ([27 a], p. 101) qui rend le pouvoir plausible et dont nous interrogeons la structure pulsative. Il précise, avec l'exemple de la tapisserie de Cettomai, le prototype du tableau vivant : "Le pouvoir, en tant que législateur, implique de mettre bord à bord deux choses qu'il est à première vue difficile de qualifier — faut-il les appeler éléments, surfaces, etc. ? — pour en faire sortir de la Loi" ([27 a], p. 102).

"Il semble que dans toute une série de cas cela pourrait être aussi un conflit entre différentes tendances proprement sexuelles." (P. 330, retraduit.)

et

"Pour affirmer une différence de nature, du reste pas très saisissable, des deux groupes de pulsions, nous manque tout motif." (Pp. 389-390, retraduit.)

mais elles ne sont pas pareilles :

"Mais c'est dans le fond la même chose, car des deux tendances sexuelles se trouvant en conflit, l'une est toujours pour ainsi dire satisfaisante au moi (ichgerecht) pendant que l'autre met au défi (heraustordert) la défense du moi. Cela reste ainsi près du conflit entre moi et sexualité." (P. 330, retraduit.)

"Les deux (groupes de pulsions) s'opposent pour nous seulement en tant que désignations pour les sources d'énergie de l'individu, et la discussion, s'ils sont dans le fond un ou différents de nature, et quand bien même (seraient-ils) d'un (seul groupe), quand se sont-ils séparés l'un de l'autre ?" (P. 390, retraduit.)

C'est pour cette même raison que Freud a introduit le narcissisme dès 1914, puisque, dans les névroses narcissiques, le moi est investi sexuellement comme un objet, et que Freud pense pouvoir élucider cette énigme par l'étude de ces névroses.

"Nous connaissons certainement le développement du moi beaucoup plus mal que celui de la libido parce que seule l'étude des névroses narcissiques promet un examen de la structure du moi." (Pp. 330-331, retraduit.)

Cette difficulté de structure, récurrente depuis la présentation de l'inconscient jusqu'à l'introduction de l'instinct de mort dans la doctrine est aussi présente dans l'article de 1914 où Freud distingue, de la manière la plus certaine, les deux termes de moi idéal et d'Idéal du moi, le fait que "l'on n'arrive pas pour autant à distinguer leur emploi dans ce texte devrait plutôt inquiéter" (E. p. 672). Expression où certains croient lire un reproche fait aux mauvais lecteurs de Freud qui ne distinguent pas ces deux emplois. Il n'en est rien. Si un reproche est à entendre dans cette phrase il ne s'adresse qu'à ceux qui ne s'en inquiètent pas, car nous les supposons avoir bien lu l'article de Freud. En fait s'ils ne l'ont pas lu, ils ne peuvent distinguer ces deux emplois dans le texte ; s'ils l'ont lu, se sont-ils aperçus qu'il est impossible de les distinguer ? Bien peu l'ont lu et, par conséquent, bien peu s'en inquiètent.

Dans ce moment intermédiaire Freud tente, en 1915, de rédiger sa Métapsychologie [1 j] en douze articles dont il ne reste que quatre éléments plus un qui vient d'être retrouvé (1985). C'est cet échec qui l'incite à construire sa seconde topique, où il radicalise sa position en allant jusqu'à traiter de ce à quoi aboutit son hypothèse de départ, puisqu'elle le conduit de manière nécessaire à subvertir nos

conceptions relatives à la causalité, sous le titre de l'automatisme de répétition.

Freud cherche un étayage rationnel de ce fait énigmatique dans la phylogenèse ([1 k], p. 334). Pour cela il a déjà construit le mythe de la horde primitive [1 h], en anthropologie donc. En biologie ([1 k], p. 390), il cherche un appui jusqu'à évoquer Weissmann [1 l]. Cette structure se présentant dans le matériau de l'analyse, il en cherche la raison en philologie chez Abel [1 g]. La réponse est logique, elle est topologique.

LACAN

Distinguons entre historicité et structure. Le développement temporel des phénomènes nous réserve quelques surprises comme des rétroactions, des renversements, des interruptions, des reprises que seule la structure éclaire.

Il nous faut indiquer par quelle démarche rationnelle, dans quel contexte raisonnable, Lacan a été conduit à introduire son stade du miroir [31]⁵. C'est de s'apercevoir de la dépendance foncière au contexte, disons-le social voire familial du sujet, qu'il faut supporter le contrecoup de l'insuffisance radicale du compte-rendu le plus précis de ce contexte. Mieux encore, nous aboutissons à un concept incertain, ou simplement paradoxal en apparence, d'une innéité acquise. Où l'on voit que nos catégories d'alors manquent quelque chose, que les catégories nécessaires dans cette situation nous manquent. Ce sont elles que nous appelons structure et dont nous entreprenons l'étude dans cette série de fascicules.

Qui dit structure dit traits ou invariants, selon quelques principes réglant les actes à effectuer.

1er chapitre. La première référence historique à la topologie dans l'enseignement de Lacan se trouve dès son premier discours de Rome, en 1953, à propos de la structure du langage. Il utilise, à cette occasion, le tore pris en objet comme illustration de cette structure (E. pp. 320-321).

Le Docteur Lacan a consacré la première époque de son enseignement (1953-1961) à une symbolisation de l'Imaginaire par l'alternance du semblable au dissemblable (E. p. 821), pour relever le Symbolique d'un engluement imaginaire où était tombée la psychanalyse après Freud.

Il nous faut reporter cet Imaginaire à l'instance du Symbolique, c'est-à-dire à la structure du langage. Dès cette période, Lacan propose une solution graphique à la conjonction des extrémités du graphe de Freud.

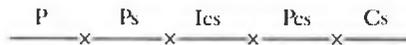


Fig. 6

5. Nous renvoyons le lecteur à l'étude de B. Ogilvie, Lacan et la formation du concept de sujet, où, pour une fois, le prétexte historique ne sert pas à négliger la structure, même si l'auteur s'arrête à l'orée de notre champ avec un Lacan ramené à Hegel. La notion de "matérialisme transcendantal" ne peut être pour nous qu'une indication, car il n'y a rien de transcendant dans notre pratique de la matérialité littéraire.

Prenons le graphe des lignes du graphe tracé par Freud dans sa lettre 52. Nous remplaçons les points par des segments et les segments par des points. Les mêmes termes s'y retrouvent. A replier ce graphe des lignes,

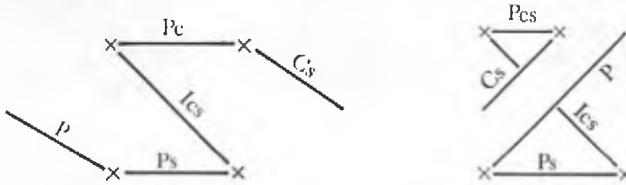


Fig. 7

nous obtenons le schéma, dit, par nous, schéma F, qui permet de s'y retrouver dans les deux schémas de Lacan contemporains de cette première époque de son enseignement.

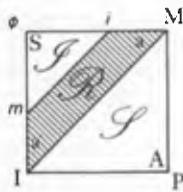


Schéma R.
(E. p. 553)

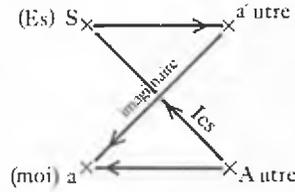


Schéma L.
(E. p. 53)

Fig. 8

Nous étudions la conjonction de ces deux schémas à la surface du plan projectif dans le fascicule n° 2. Le Docteur Lacan pose ainsi, dès le début de son enseignement, l'énigme qu'il nous faut rapporter à la structure du langage, en formulant à propos de ces éléments la question de savoir s'ils sont un ou s'ils sont deux, et prolonge par là la subversion de notre tradition réflexive.

Reprenons le graphe de Freud, transformé en son graphe de lignes. Nous pouvons y reporter, grâce à notre schéma F, les lettres du schéma R de Lacan (il est à noter qu'il n'y a pas de point marqué aux extrémités du graphe de lignes ; à ces places, pourtant, correspondent les lettres m et M) et les orientations des arêtes du schéma L.

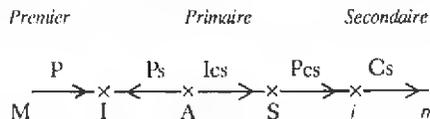


Fig. 9

Le processus primaire, où domine le principe du plaisir, est un processus de pensée qui règne dans l'inconscient (E. p. 650). Ce serait une erreur de croire que ce qui est primaire est premier. Il y a donc pour nous un processus premier qui domine les perceptions

séparées de l'inconscient par les perception-signes. Le processus secondaire, régi par le principe de réalité, domine le conscient séparé de l'inconscient par le préconscient.

Nous reportons de même, les lettres du schéma de Freud sur notre schéma F, avec celles du schéma R et les orientations du schéma L.

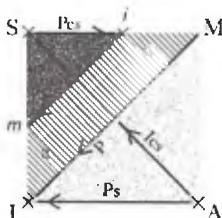
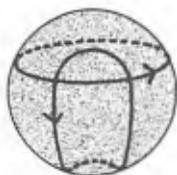


Fig. 10

Sur notre schéma F, l'orientation des arêtes par des flèches vient du schéma L et la trame des zones, vient du schéma R. Nous remplaçons les lettres J, R, S par trois couleurs différentes. S du côté du processus premier, R gril imaginaire de la réalité, J du côté du processus secondaire, qui découpent en trois le processus primaire Ics dans notre schéma.

Le Docteur Lacan prolonge cette interrogation afin de présenter à son auditoire l'articulation de ses schémas en construisant le graphe du désir, où nous lisons le problème de la disjonction et de l'intersection de deux ensembles logiques en des diagrammes d'Euler-Venn posés sur la sphère. Il donnera un développement à cette présentation logique au cours de l'étape suivante de son enseignement.



Le point de capion sur la sphère.

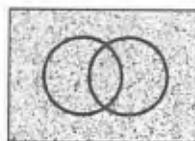


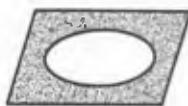
Diagramme d'Euler-Venn⁶.
Fig. 11

A partir du stade du miroir, le Docteur Lacan traite des idéaux de la personne, en les rapportant au schéma structural que nous lisons dans le schéma optique (E. pp. 673, 674 et 680). C'est ce que nous faisons avec la topologie à partir de l'Imaginaire en une mathématique. Mais où l'Imaginaire conserve une fonction.

2e chapitre. Lors de la seconde période de son enseignement (1961-1971), le Docteur Lacan pratique une imaginariation du Symbolique par le recours à la théorie de surfaces topologiques.

6. Etoffe, fascicule n°2, chapitre IV.

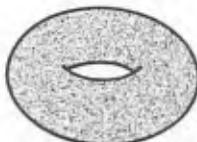
C'est dans cette période qu'il met en correspondance les quatre objets de la pulsion avec les quatre surfaces topologiques élémentaires.



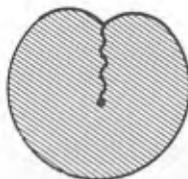
Trou I
Le trou comme
rupture de surface.



Trou IS
La bande de Mœbius,
ici avec un trou.



Trou S
Le tore (son trou
est spécifique).



Trou ISR
Le plan projectif réel
(immergé en cross-cap).



Trou SI
(Le bord du trou mœbien
est un huit intérieur).

Eléments remarquables de la topologie des surfaces.

Fig. 12

Le moment de Freud — nous devons l'indiquer à chaque fois comme une question double — se formule ainsi: "Est-ce un ? Est-ce deux ?" Ce moment revient à cette étape sous l'aspect de l'articulation des surfaces non orientables aux surfaces orientables dans la construction de Lacan, dite par lui d'involution signifiante par laquelle il résume la répétition freudienne (Logique du fantasme, 1967 ; L'Etourdit, pp. 26-27, 1971)⁷. Nos travaux coordonnent cette structure à la version logique, en remplaçant les diagrammes d'Euler-Venn par la mise à plat des nœuds qui nous viennent de la troisième étape de l'enseignement de Lacan.

En effet, dans la seconde période, il reconsidère étape par étape l'ensemble de la construction de la logique mathématique, en respectant les trois étages, du calcul des propositions, du langage des prédicats avec les Kanteurs et de la théorie des ensembles⁸.

3e chapitre. Dans le troisième chapitre topologique (1972-1981) de son élaboration du discours analytique, le Docteur Lacan reformule l'ensemble de ces questions dans le champ d'existence du nœud. C'est bien que les formulations précédentes réussissent à montrer la trame de la structure en échouant à l'écrire.

7. Etoffe, fascicule n°2, chapitre VII.

8. Nons, fascicule n° 0.

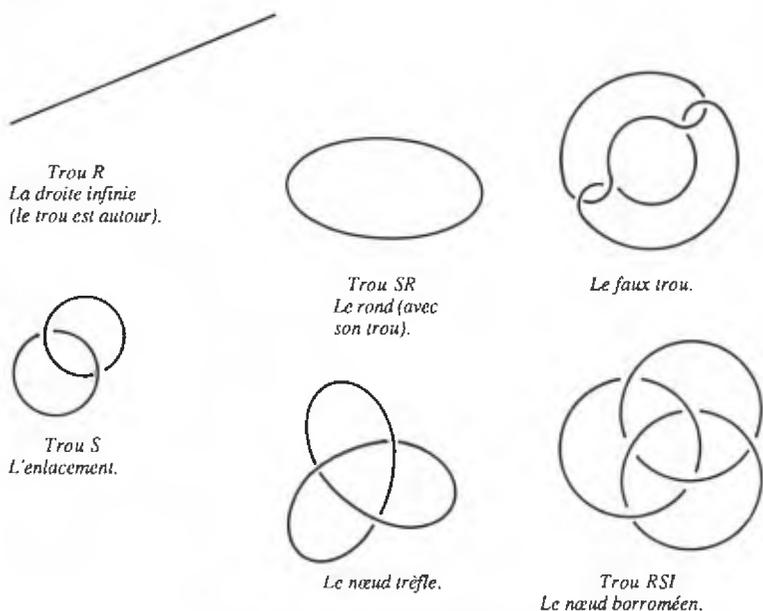
Pour éviter l'écueil de la représentation, précédemment écarté grâce au plan projectif, il n'est pas constructible en dimension trois; la question d'une autre écriture se formule en termes de nœuds.

Il s'agit, bien sûr, de situer le Réel, en plus des instances précédentes que sont l'Imaginaire et le Symbolique, et non plus la réalité psychique qui est dite implicite dans le nœud à trois (Séminaire RSI, 1974-75).

Mais la topologie n'est pas une fantasmagorie du Réel, comme certains veulent bien le dire pour faire entendre par là qu'elle est impossible, alors qu'elle leur est simplement difficile. La topologie ne prétend pas, comme nous l'avons déjà dit, nous sortir du fantasme mais en rendre compte, à la manière d'une écriture, avec les nœuds.

Certes cette topologie part de l'Imaginaire, comme les mêmes le lui reprochent pour la disqualifier cette fois, Kant à ce soi-disant Symbolique, alors qu'elle produit un bouleversement de l'ensemble du fait du Symbolique.

Pour notre part, pour lire cet état d'achèvement, nous considérons dans un temps préalable les nœuds de bord des surfaces trouées, définis par les plongements des surfaces; ils n'ont d'existence qu'extrinsèque.



Éléments remarquables de la topologie du nœud⁹.

Fig. 13

Il est remarquable que le nœud s'efface dans l'intrinsèque mais que cette présentation conserve la trace du nœud (genre du nœud). La théorie des surfaces, argument du chapitre précédent de

9. Fascicules n^{os} 3, 4, 5.

l'enseignement de Lacan, est pour nous un moyen d'investigation dans l'espace autour du nœud.

Nous donnons dans nos premiers fascicules les indications nécessaires à qui voudrait vérifier par le calcul ce que nous effectuons par le dessin dans l'étude des nœuds (à partir du fascicule n° 3).

Pour le Docteur Lacan, il s'agit de partir d'une impossibilité rencontrée dans les étapes précédentes comme un trou, c'est-à-dire pour lui le Réel, afin de rendre compte de la fonction imaginaire du phallus qui voile ce trou. Mais pour ne pas retomber dans ce damné phallus à la manière philosophique, il lui faut ne pas réussir trop facilement. Dans son commentaire de la structure, ces catégories toujours reviennent, telles que nous les avons dites, le Réel : son impossible devient existence; et le Symbolique : trou (insistance), dans un serrage de plus en plus précis, à partir de la consistance imaginaire, de l'échec à rendre compte du rapport sexuel.

Il doit s'en recueillir d'une écriture autre, en quoi cet échec consiste. C'est dire de quelle façon cette structure ne peut pas s'écrire (Introduction à la publication du séminaire RSI, p. 88, et A la lecture du 17 décembre). Structure dont l'échec à l'écrire rend raison de son impossibilité même. L'ensemble des concepts de la psychanalyse se trouve modifié par contrecoup puisque chacun, comme un quelconque des éléments du matériau clinique, porte à partir de là la trace de cette structure évanescence.

Pour conclure, nous avons déjà réalisé cette écriture autre pour le calcul des propositions de la logique. La suite de la construction s'accomplit à partir de là.

4. De Freud à Lacan, un certain parcours s'achève. Le terme d'achèvement ne signifie pas cessation de la pratique, mais sa formalisation à partir de ce virage où la situation de la psychanalyse est devenue irréversible.

Elle s'inscrit désormais rétroactivement dans ce double tour produit par l'œuvre de Freud et le commentaire de Lacan.

Il reste à établir des séries de lectures qui nous permettront de nous diriger "vers Freud", dans ce retour amorcé par Lacan.

Que les observateurs prudents et ceux qui ont préféré rester sur la touche se rassurent, il n'y a pas de risques qu'il y ait d'autre phénomène comme celui de Freud ni d'autre phénomène comme celui de Lacan. Ce n'est plus nécessaire dans ce champ. D'ailleurs qui souhaiterait assurer cette fonction désormais révolue, à moins de se laisser glisser sur la pente au mime, et cela sans résultats ? Aujourd'hui, les difficultés sont d'un autre ordre.

5. La couture de la place du sujet est désormais achevée. Elle obture cette béance dont Freud puis Lacan préservaient l'ouverture et il n'y a pas lieu de la préserver autrement. La double boucle que disent Freud et Lacan est révolue, vient l'avènement de Canrobert (Introduction de Scilicet..., p.11), il ne saurait s'agir d'un label d'usage. Nos résultats participent d'un nouveau style de lecture, dont la portée mathématique

est d'aller au-delà des intérêts d'une corporation. Notre sérialité n'est pas de filiation mais de transmission et d'invention par conséquent.

Un décalage entre le rang d'un terme et son indice constitue toujours la difficulté majeure dans l'étude d'une série mathématique. Les termes d'une série sont indexés par l'ensemble des nombres que l'on dit naturels. Cet ensemble commence par le numéro 0.

Le numéro 1 n'est pas premier, il y a toujours un élément avant le un. Ainsi donnerons-nous un fascicule numéro 0 à propos de logique, afin de nous situer dans la suite de cette série.

Nos fascicules sont au nombre de six :

- n° 0 NONS (la topologie du sujet)*
- n° 1 ESSAIM (le groupe fondamental du nœud)*
- n° 2 ETOFFE (les surfaces topologiques)*
- n° 3 NŒUD (le nœud borroméen)*
- n° 4 SYMPTOME (nœuds à quatre et la suite)*
- n° 5 SINTHOME (le nœud borroméen généralisé).*

6. *Une difficulté majeure pour notre époque peut se résumer ainsi : il est faux que quiconque, même dans le champ freudien, ne veuille pas de la topologie et il est faux que les mêmes l'acceptent. Cette situation est décrite par Lacan lorsqu'il compare la psychanalyse à l'architecture (E., p. 698). Il y relève un discord entre une puissance logique qui l'apparente au discours et les fins d'utilité dont se réclame tout pouvoir. Pour être inutile, elle n'en est pas moins principale dans notre présentation de la pratique, comme nous l'expliquions plus haut. L'utilité n'est pas une notion pertinente, elle est même dangereuse en ce champ où le temps perdu produit sa trouvaille.*

Quand on subvertit la logique classique de la pensée, celui qu'on prive de cette imagination risque de croire n'avoir plus affaire qu'à de l'irrationalité. Tout se passe comme si on retirait à l'apprenti nageur sa ceinture de liège.

Certains voudraient substituer le naturel à l'artificiel, sans tenir compte de ce qu'il n'y a rien de naturel pour un être qui est sujet à un double narcissisme.

Ainsi les premiers analystes se sont partagés sur ces questions et les savants qui leur étaient contemporains et qui ignoraient tout, pour la plupart, de la logique articulée des signifiants, de la possibilité même d'une articulation et encore plus des impossibilités qui s'en déduisent, sont-ils tombés à tout instant dans ces pièges.

Ainsi pour les analystes post-freudiens, de même pour les néo-lacaniens.

Lâcher les catégories reçues de la logique équivaldrait pour eux à perdre pied. Un premier pas vers la vérité consiste à les modifier et l'étude des effets de cette modification elle-même fournit le secours que nous cherchons. Lacan a compris cette nécessité en reprenant pour le compte de la psychanalyse des recherches inaugurées par d'autres (linguistes, logiciens, mathématiciens, ethnologues). Il a doté la psychanalyse d'une topologie du sujet qui l'affranchit des

catégories classiques et ne saurait être considérée comme une discipline auxiliaire.

Ceux de ses élèves qui ont adopté la thèse "faible" du caractère auxiliaire de la topologie n'en ont pas fait longtemps usage et ont tous avoué ne pas lui trouver d'emploi dans leur pratique comme dans son compte rendu. Nous sommes aujourd'hui peu nombreux à avoir l'usage et la pratique d'une topologie à laquelle nous tenons du fait d'une thèse plus forte :

Il est faux de dire que "la topologie soit la psychanalyse" et il est faux de dire que "la topologie ne soit pas la psychanalyse".

Nous disposons, depuis 1983, d'une construction de logique mathématique qui modifie la logique classique grâce à un opérateur topologique dit d'intérieur. C'est la topologie du sujet. Nos travaux consistent à suivre les conséquences de cette structure lorsque nous la rencontrons dans le discours, ce qui ne manque de se produire à tout propos. C'est cette structure que nous retrouvons dans l'abord des surfaces topologiques et qui seule organise de manière nécessaire la topologie du nœud. En effet il s'y trouve des enlacements, qui y sont et qui n'y sont pas. Cela commence à quatre.

C'est pour atteindre ce degré de structure simple que nous mettons à la portée des lecteurs les précisions qui sont à notre disposition, lorsqu'elles sont nécessaires.

Le Docteur Lacan a indiqué les références nécessaires, sans les développer de manière intégrale, laissant le soin à son auditoire de s'y reporter et de les préciser. Ce n'est pas qu'il ne l'ait fait pour lui-même comme beaucoup peuvent en témoigner. Il se contentait d'en user toujours de façons multiples et pertinentes, avec assez de soin pour que à suivre ses indications, on puisse trouver ce qui est seulement annoncé et utilisé dans la traduction. Beaucoup de travaux d'explicitation dans les domaines abordés sont à venir, il y en a déjà quelques ébauches. Notre série se propose d'être plus qu'une ébauche.

7. Il s'agit d'utiliser ces précisions dans la pratique pour le travail de construction du psychanalyste, celle de l'objet a. Cette tâche se poursuit, elle n'est autre que celle de Canrobort ; une clinique psychanalytique en sortira, produite par les intéressés eux-mêmes.

Nous donnerons également des indications pour ceux qui cherchent des raisons de se former à cette topologie sans y être encore engagés. Nous nous restreindrons aux idées qui devraient être les plus aisément reçues, gardant les nouveautés de la découverte pour notre lecture. Cette lecture ne peut être intelligible sans la pratique du mathème topologique, auquel nous renvoyons constamment.

De cette topologie, d'autres peuvent extraire d'autres résultats. De plus, nous avons le témoignage de ceux qui s'y vouent un moment, que leur travail ne peut manquer d'y faire retour.

Nous construisons cette topologie du sujet en une élaboration qui met le sujet à contribution, dans la mesure où "conscience sans science, n'est que complicité d'ignorance".

L'intérêt de notre série de manuels tient aussi à la connexion d'avec les mathématiques courantes, contrainte que nous nous sommes imposée. Nous donnons les composants algébriques classiques, c'est-à-dire élémentaires (Bourbaki), de la topologie du sujet et ceux qui sont en progrès, c'est-à-dire telle qu'elle est en train de se faire dans notre champ (P. Soury), nécessaires à la lecture de Freud et de Lacan.

Nous portons l'élaboration de la topologie du sujet jusqu'au moment où elle est prête à tourner en une théorie mathématique, nous ne faisons pas, malheureusement pour ceux qui le réprouve, œuvre mathématique exclusive. Il restera aux mathématiciens à la reformuler dans leur discours afin de la discuter et d'en découvrir les conséquences dans leur discipline.

8. Nous définissons la topologie en extension comme Lietzmann parle de Topologie explicative (Anschauliche, visual) [5], mais nous accordons une part plus grande à la logique puisqu'elle fait partie de notre topologie du sujet de manière éminente, et une attention spéciale aux dessins que nous établissons comme des formules mathématiques.

Nous rencontrons couramment trois attitudes différentes à l'égard de la topologie.

D'abord quiconque peut ne pas savoir de quoi il s'agit. L'ignorance reste la situation courante et cet état de fait relève de la responsabilité des spécialistes. Pour s'en persuader, il suffit de noter que, dans l'ère française, par l'intermédiaire des académies, les instituteurs emploient le terme de topologie pour désigner certaines des activités qu'ils proposent à leurs élèves dès la seconde année de l'école maternelle. Il n'y a donc rien de bien inaccessible dans l'approche de la topologie.

Puis deux situations se trouvent liées entre elles que nous qualifierons, pour l'une, de timidité studieuse telle que celle-ci est nécessaire mais insuffisante à elle seule, pour l'autre, de pratique effective de la topologie qui nécessite à un moment la première. Que ces deux attitudes se rencontrent séparément, cela tient à une particularité de style en mathématiques, et à la structure du discours qui se divise en topologie générale et en topologie (algébrique, différentielle, semi-linéaire, combinatoire, géométrique...). Il y a ici la même articulation entre ces deux domaines, de la topologie générale et de la topologie proprement dite, qu'entre la logique mathématique et les mathématiques. Décrivons-la.

La prise en compte des structures topologiques, dans quelque domaine que ce soit, se fait au moyen d'une investigation qui consiste à construire des traits invariants au cours de transformations continues.

Ainsi, dans la pratique de la topologie, nous rencontrons la nécessité de définir la continuité. Cette définition fait l'objet de la topologie générale, dite topologie ensembliste¹⁰.

Certes, la topologie suppose et présuppose les bonnes définitions de la topologie générale, mais dans la pratique l'élaboration se poursuit en sachant faire place à ces définitions sans y revenir dans chaque cas. Il est un principe d'abréviation que nous pouvons situer dans le recours à un langage, le langage des catégories¹¹.

De manière inverse, le fait, pour certains débutants, de piétiner en topologie générale élude la pratique effective de la structure au profit de travaux d'un autre ordre. S'ils ne passent pas la barrière qui sépare ces deux aspects de la topologie, ils en sont réduits à affiner éternellement des définitions sans jamais trouver de résultats probants, tant le formalisme s'alourdit dans cette voie sans issue. Il est alors question pour eux d'étudier des familles d'ouverts, de fermés, de voisinages, des filtres dont bien peu voient l'intérêt autre qu'anecdotique tant ce domaine est riche en nuances. Nos apprentis topologues tombent dans un relativisme de mauvais aloi pour la psychanalyse.

De plus il faut signaler qu'il est des mathématiciens, et non des moindres, qui contestent l'aspect mal pratique de ces définitions générales pour qui interroge la structure d'un domaine particulier, tant la topologie générale est restée de manière historique dirigée vers l'analyse fonctionnelle classique (il s'agit de l'analyse des fonctions réelles à variables réelles). Il y a de l'idéalisme et de la transcendance dans cette interrogation classique et limitative chez les mathématiciens eux-mêmes, lorsque ceux-ci se fascinent pour la structure des nombres réels sans une stratégie véritable, faute d'avoir intégré les résultats de logique mathématique dus à K. Gödel et à P.-J. Cohen.

Remarquons que dans ce petit tableau des attitudes rencontrées à l'égard de la topologie nous ne parlons, de manière évidente, même pas de l'activité fantaisiste, prétendument topologique de certains. Nous avons cru comprendre, chez nos contemporains, que l'on appelait "lacaniens" les tenants de cette topologie fantastique. Nous ne souhaitons pas laisser à l'abandon, voué à un si triste sort, l'enseignement de Lacan avant que de revendiquer d'être de ses élèves. Les intuitions de chacun ont notre plus profond respect, le principal dépend de la présentation de l'ouvrage.

Pour résoudre la difficulté rencontrée dans l'apprentissage de la topologie, sans en éluder le profil, nous voulons attirer l'attention du lecteur sur une particularité de style en mathématiques.

Nous appelons principe d'abréviation cette condensation qui ne relève de nulle transcendance. Ce principe veut qu'un ouvrage intitulé de topologie, pour prendre l'exemple qui nous concerne, laisse entendre et suppose, dès son titre ou dans le titre de la série dans laquelle il est publié, que les fonctions (morphisme de la catégorie, transformations) dont il traite sont continues et que les objets qu'il

10. Nons, fascicule n° 0.

11. Essaim, fascicule n° 1.

étudie sont rattachés à des espaces topologiques bien connus, sans qu'il soit nécessaire de les redéfinir à chaque fois.

Cela de la même manière qu'en mathématique nous ne redéfinissons pas l'implication matérielle dans chaque ouvrage. Il est tout de même parmi nos mathématiciens idéalistes certains d'entre eux pour se plaindre du fait que leurs collègues poursuivent des travaux en connaissant peu de logique et de théorie des ensembles, alors que la théorie naïve semble suffire.

C'est comme s'ils exigeaient idéalement de chaque automobiliste la connaissance de la mécanique pour être autorisé à conduire une voiture. Ils ne font que nier par-là le trait caractéristique de la méthode industrielle, trait qui a fait son succès et son développement. En effet, dans l'empire industriel, comme dans la langue, l'utilisateur peut faire un usage juste et pertinent de l'objet sans savoir. C'est-à-dire sans avoir participé, ni même se rendre capable de participer, à la conception et la fabrication de l'objet. Il se pose bien sûr la question de son entretien qui était bien mieux résolu dans l'ère des techniques néolithiques.

Certes dans la psychanalyse les choses vont d'une autre manière puisque, dès le départ et jusqu'au bout, le psychanalysant, celui qui s'adresse au psychanalyste, est tenu pour responsable des conséquences imprévisibles de son dire, et c'est pour qu'il puisse assumer cela avec raison que la topologie est nécessaire dans son enseignement. Mais cette donnée ne doit pas aller, sous prétexte de mathématiques, jusqu'à forclure (figer, holophraser) le style des mathématiciens, comme cela se fait pour quelques esprits simplistes. C'est dire qu'il y a, même en mathématiques, recours à quelque condensation.

Bien sûr qu'en topologie la topologie générale ou ensembliste renouvelée est supposée, mais la stratégie est différente dans la méthode mathématique, car celle-ci relève de la structure du langage, c'est-à-dire d'une pratique de l'absence de métalangage. C'est cette structure qui est scellée dans la méthode industrielle.

Nous ne raillons ni ne négligeons ces prémisses et nous encourageons ceux qui sont encore à les anonner. Car nous tenons à leur signaler qu'ils ont beau jeu de ne pas comprendre l'usage de notre topologie dans la pratique, ni la pratique de Lacan lorsque celui-ci recourt à la topologie, puisqu'ils s'y prennent eux-mêmes d'une façon qui ne convient pas. Nous tenons à leur en montrer la raison.

C'est pour cette raison que nous proposons de prendre les choses par les deux extrémités en même temps, chacune étant située à sa place.

En des essais qui mettent, sans attendre, la topologie en pratique au travers des variétés.

En un retour à la topologie ensembliste, non pas en général mais dans la question spécifique et principale des structures de la logique propositionnelle, prédicative et ensembliste. Ceci pour traiter de chacun de ces trois chapitres de la logique mathématique en une topologie au sens général du terme. Nous obtenons ainsi les prémisses de la topologie du sujet par la modification de la négation à la manière de la logique modale en une topologie.

Notre ouvrage mathématique de référence est celui de E.E. Moïse [10] pour la pratique de la topologie. Peut-être certains trouveront-ils qu'il y a trop de résultats dans ce recueil. C'est qu'il existe une résistance qui détourne toute épreuve de certitude. Les résultats sont faussés du seul fait qu'ils sont enregistrés par les intéressés eux-mêmes. Deux procédés permettent de concasser cette obstruction.

L'un consiste à mettre en place un protocole d'expérience et d'enregistrement laissant place au fonctionnement. Ce dernier est d'ailleurs de plus en plus soutenu par ceux qui s'y sont déjà produits.

L'autre se résume en une communication de résultats, en vue de leur discussion par quiconque, même s'il est extérieur au champ concerné.

Ces deux solutions ne s'opposent que pour l'ignorance de ceux qui soutiennent la résistance dont se sustente le malaise dans la civilisation, merveilles et surprises toujours renouvelées dans chaque cas de transfert. Pour le reste, elles peuvent être entreprises conjointement.

Plaisance, mai 1988.

Fascicule de résultats n °2

ÉTOFFE

Les surfaces topologiques intrinsèques

Nous utilisons le sigle E. suivi du numéro d'une page lorsque nous évoquons un passage explicite des *Ecrits* de Lacan publiés en un volume aux éditions du Seuil en 1966. Lorsqu'il s'agit d'un écrit postérieur à cette date, nous donnons le titre de celui-ci avec l'indication de la page de la première édition, celle-ci est précisée dans notre bibliographie. Nous procédons de même par un renvoi à notre bibliographie pour les références à l'œuvre de Freud.

Bien sûr, ces renvois sont inutiles pour qui possède son Freud et son Lacan sur le bout des doigts, mais notre propos est de provoquer cet effet chez d'autres lecteurs qui n'en sont pas encore là. Nous espérons les soutenir en procédant ainsi.

Les références au Séminaire de Lacan recourent à notre bibliographie. Les renvois à l'intérieur de la série des fascicules de résultats sont donnés par des notes à chaque fois que cela nous a paru nécessaire.

Dans ce livre, j'ai voulu montrer la place éminente de la caverne dont parle Lacan, dans la topologie et, plus généralement, dans la psychanalyse. De toute évidence l'entrée de cette caverne (E. p. 838), entre les enseignements divers que nous a laissés ce grand logicien, est pour l'analysant et le psychanalyste la place la plus importante, mais pour l'homme cultivé, épris d'intelligence, elle a un sens incomparable.

Le tore est une surface topologique bilatère, à deux faces donc. Nous lui consacrons notre chapitre V. Sa structure est historique. Son historicité tient-elle seulement au fait qu'il soit cité par Lacan, dès la première référence à la topologie dans le discours de Rome (E. pp. 321-322) ? A cette époque, Lacan illustre de cet anneau une structure, qui révèle dans la parole un centre extérieur au langage. Que le centre soit réputé intérieur tient à l'usage de ce terme pour désigner le centre d'un cercle sur le plan. C'est le lieu où est placée la pointe du compas lors du tracé du cercle.

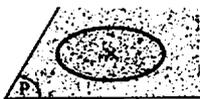


Fig. 1

Le cercle mis à plat détermine deux zones, dont l'une est infinie (non bornée) autour de lui ; elle est dite extérieure. La zone bornée qu'il contient sera dite intérieure. Il faut deux théorèmes à la théorie des surfaces, le théorème de Jordan et celui de Schönflies, pour confirmer ce fait.

Le Docteur Lacan suggère qu'on entende cet anneau, notre cercle, comme flottant dans l'espace, au lieu d'être mis à plat, il nous invite à imaginer que le centre, ce point équidistant de chaque élément du cercle, est alors dans un espace rendu connexe du fait de cette nouvelle dimension, espace qui peut être dit, dans son ensemble, extérieur à l'anneau.



Fig. 2

Il y a ici un double jeu de la dimension à propos de cet anneau. Hors le passage du plan à l'espace de dimension trois, nous passons du cercle, le cercle est une ligne, au tore, le tore est une surface. Le rond de ficelle (S. XX) autorise la traduction de l'un à l'autre.

Mais, d'autre part, l'insistance de la structure, dans l'étoffe de la pratique, nécessite le recours à d'autres surfaces topologiques que les surfaces bilatères d'où ne peut plus être méconnue la pulsation de cette structure. Il s'agit des surfaces topologiques unilatères dont le plan projectif présente le paradigme. Il fera l'objet de notre chapitre VII. Il supporte le mode de fermeture propre à l'entrée de la caverne.

A la surface du plan projectif, autrement que sur un plateau, le centre va à ravir, comme nous le montrons dans l'Appendice de cet ouvrage.

Par contre, c'est de manière intrinsèque à la surface du tore lui-même que le Docteur Lacan relèvera un trait de structure qui soutient son historicité. Ce trait consiste en une nécessité imposée aux trajets toriques. Lacan démontrera qu'il s'agit de la structure de la névrose (*L'Etourdit*, p. 42).

J.- M. V.

8

LE MIRAGE DE LA TOPOLOGIE

Pour introduire...

Nous adoptons dans ce volume de notre série un style localement plat comme il convient pour parler de surfaces.

Depuis que Jacques Lacan a ironisé sur la prétention d'un psychanalyste de New-York à prendre les choses par la surface (E. pp. 393 et 598), les surfaces peuvent avoir mauvaise réputation dans le discours de la psychanalyse, parmi ceux qui supportent le lien social qu'implique la pratique de Freud.

Lacan précise cependant que "l'idée est elle-même dangereuse" de croire que "la surface est le niveau du superficiel". "Une autre topologie est nécessaire quant à la place du désir" (E. p. 601). Nous entreprenons cette topologie, au travers de notre série de fascicules.

Les surfaces topologiques sont des objets (variétés, manifolds,...) topologiques (continus) de dimension deux.

Il y a la dimension (a).

Il y a le deux (a').

La dimension est un invariant topologique dont nous donnons la définition et dont l'usage doit être établi dans la psychanalyse jusqu'à l'introduction par le Docteur Lacan du terme de dimension (1a).

Le nombre deux correspond pour nous à l'Imaginaire (1a').

La dimension d'un objet topologique est définie par la dimension des coupures qui le disjoint (en plusieurs morceaux). C'est la définition qu'en donne Poincaré [32]. Une dimension est faite de dimensions plus petites, elles-mêmes faites de dimensions. Comme un essaim signifiant est un collier fait d'anneaux eux-mêmes colliers faits d'anneaux¹ (2a).

L'Imaginaire c'est le corps (2a').

Faire intervenir une autre dimension n'est pas sans conséquence. Comme nous venons de le voir dans ce qui précède, c'est seulement dans le plan, de manière intrinsèque, que le centre peut être dit intérieur au cercle (3a).

La relation au corps dans le discours analytique est qualifiée de narcissique (3a').

1. La naissance de la dimension

Nous voulons soumettre la description que nous donnons de la doctrine à cette doctrine elle-même. Seule cette torsion produit

1. *Essaim*, fascicule n° 1, pp. 127-142.

une quelconque consistance. La doctrine que Freud se formule est présentée en terme d'appareil, qualifié de psychique. Il est neurologue, mais il se trouve qu'il est aussi médecin. Dans cette rencontre entre une technologie conçue et une pratique clinique, force est de dire ce qui s'y passe et de s'y soumettre. Il entend dès sa *Contribution à la conception des aphasies* [1 a], comme d'autres autour de lui, que le matériau rencontré a le profil du langage. Il en retire la notion d'un appareil se construisant par traductions successives. Nous voyons alors que, de son modèle initial représentant la représentation qu'il se fait de l'appareil psychique, il ne retient bientôt que la manière dont il l'a formé. L'appareil psychique devient structure du sujet. Annulant ainsi la différence que certains établissent entre une théorie et une pratique, lorsqu'ils n'y sont pas, s'agissant de pseudo-théoriciens ou de soi-disant praticiens.

a - *La dimension est un invariant topologique*

La dimension est l'invariant topologique principal, et ce terme donne lieu à une difficulté qui tient à une curieuse plaisanterie dans la culture scientifique.

"Prendre les dimensions d'un objet" consiste, dans le langage courant, à mesurer cet objet selon les directions de l'espace. Il s'agit de prélever les mesures de sa longueur, sa largeur et sa hauteur, pour prendre l'exemple des trois dimensions d'un solide.

La notion de dimension y est donc liée de manière attestée à la mesure, du fait de mesurer.

A partir de cette expérience, le lecteur débutant ne comprend plus ce qu'est la topologie, si elle consiste, comme cela est vrai, à abandonner le recours à des mesures et que la dimension est son principal invariant.

Il est donc nécessaire de donner une définition rigoureuse de la dimension, qui ne doive rien à la mesure selon les degrés de l'encombrement d'un objet.

Ces directions sont appelées, en physique, degrés de liberté. Il y s'agit donc de mouvements. Par exemple, un mouvement plan se déploie selon deux directions extrêmes et leurs compositions intermédiaires. On dit qu'il se produit en dimension deux.

D'une manière plus générale lorsqu'un phénomène dépend de deux paramètres ou de deux variables, on parle de surface par métaphore géométrique.

Si nous mesurons l'encombrement selon les directions de l'espace, ce sont ces directions qui s'approchent le plus de la notion de dimension topologique. Elles peuvent être définies indépendamment de toute mesure.

Il existe d'abord une définition inductive de la dimension, à partir du point considéré comme objet sans dimension en géométrie euclidienne. Une composition de plusieurs points forme une ligne, de dimension un ; une juxtaposition de lignes forme une surface, de dimension deux ; un amoncellement de surfaces forme un volume, de dimension trois, etc.

Mais cette présentation reste intuitive, où nous voyons pourtant qu'une dimension est faite d'autres dimensions, à la manière dont un essaim est fait d'autres essaims, mais dans ce cas il s'agit d'une autre dimension.

Pour les bien définir, il faut prendre les choses à l'inverse. Un objet sera de dimension n s'il peut être disjoint en deux parties non connexes par une coupure de dimension $n - 1$.

En descendant vers la dimension zéro, la dimension deux est définie par le fait de pouvoir être scindée par la dimension un, celle-ci est une ligne puisqu'elle-même peut être décomposée par des coupures de la dimension du point, si celui-ci est considéré de dimension nulle.

Les surfaces sont donc ces objets découpés par des lignes ; la structure de surface est définie par des coupures de dimension un. Nous étudions dans ce volume les trajets, qui consistent dans la surface, selon lesquels celle-ci peut être coupée. Les coupures de dimension un font les surfaces, elles indiquent la structure de surface. La structure de surface c'est la coupure, et nous appellerons étoffe le lieu où s'effectuent ces coupures.

Il y a d'autres définitions de la dimension en topologie. Ce concept donne lieu à une théorie de la dimension (voir la bibliographie relative à cette question, p. 333). On peut trouver une formulation récente de la définition de la dimension inductive au sens étroit et au sens large, et la définition de la dimension par recouvrement ([14], p. 54). Signalons surtout les tentatives pour définir des dimensions intermédiaires grâce à l'enroulement. Comme une sphère est localement de dimension deux, mais enveloppe un volume et ne peut être plongée à la surface du plan, nous rendons compte de ce fait en disant qu'elle est localement plate. Une surface topologique est localement équivalente à une portion du plan, mais elle peut présenter un encombrement qui fait volume.

Cette question mérite d'être reprise encore à partir des éléments que nous tentons de recenser ici, et d'autres encore².

2. Avant Poincaré nous devons à Dedekind d'avoir su relever incidemment le caractère topologique de la dimension à l'occasion d'une lettre que lui écrivit Cantor où celui-ci explicite sa découverte de la mise en correspondance point par point de l'ensemble qu'est la surface d'un carré avec un de ses côtés. C'est à cette occasion que Cantor émet sa formule pathétique : "Je le vois mais je ne le crois pas." Il pensait ainsi démontrer l'inconsistance de la notion de dimension

Le Docteur Lacan a d'abord employé le terme de catégorie, pour parler du Réel, de l'Imaginaire et du Symbolique, il nomme des trois lettres zone \mathcal{R} (réalité psychique), zone \mathcal{S} et zone \mathcal{J} trois zones distinctes de son schéma R, comme nous allons le voir dans la suite. Puis il a successivement substitué à la notion de catégorie celle de dimension (dont il fit la dit-mension), pour aboutir enfin à celle de consistance lorsqu'il nomme R (Réel), S, I les trois ronds de ficelle de la chaîne borroméenne. Traiter du passage de la réalité psychique au Réel dans l'enseignement de Lacan nécessite un itinéraire comme le nôtre. Il s'agit de rendre compte plus que de l'épaisseur des choses, de l'épaisseur des mots, leur poids dans l'énonciation ou, pour mieux dire, la taille du cycle de leur résonance raisonnante.

Nous commencerons, dans ce volume, à en traiter à l'occasion de notre pratique de traduction, au travers de mots en usage dans le discours de la psychanalyse, et de constructions topologiques.

a' - Le nombre d'eux c'est l'Imaginaire

Faisons partir ce d'eux, momentanément, du deux de la symétrie plane du miroir. Elle définit un espace imaginaire. Il est fait de leurres, de trompe-l'œil, d'images qui disparaissent ou s'interposent en de multiples constructions d'optique géométrique. Dans la pratique, cet espace relève d'un repérage temporel plus précis, il est spécifié par des événements, des souvenirs dont on ne retrouve pas la date, où la chronologie s'embrouille, qui n'ont pas de lieux géographiques, il est habité de fausses reconnaissances. Aussi peu située qu'un rêve, ni en un autre lieu, la position de cet espace imaginaire explique, a contrario, la fonction précise de la datation historique, exigée par Freud dans l'analyse (E. p. 183).

et, par-là, son caractère imaginaire. Ce à quoi Dedeckin répond avec une rare précision que la construction est bien faite mais complètement déchiquetée. Formulant ainsi que la dimension reste une notion liée aux propriétés continues, une notion topologique si elle n'est pas ensembliste.

L'équivalent en théorie des ensembles d'une pareille notion est celle du nombre dont la définition et la construction sont plus problématiques.

Le nombre ordinal peut être construit comme invariant d'une théorie des ensembles avec axiome de choix.

Une définition du nombre cardinal s'ensuit comme invariant de cette même théorie, mais nous ne savons pas construire le nombre (cardinal) comme invariant d'une théorie des ensembles quelconque (sans axiome de choix). Le nombre serait-il un invariant topologique, le nombre cardinal s'entend ? Cette question importe du fait que le nombre est bien le "mathémata", l'objet de la mathématique, principal depuis les Grecs, au point que la plupart ont confondu la mathématique avec la comptabilité et le mathématicien avec le calculateur prodige. Pour se saisir de cette différence, il faut distinguer le nombre et le chiffre avec leurs fonctions respectives dans la construction des invariants.

Le Docteur Lacan n'a pas hésité à faire partir son enseignement de l'espace produit par le miroir, comme cas particulier de la fonction des images dans le problème de la signification de l'espace pour l'organisme vivant (E. p. 96). Mais il signale qu'on n'a rien à attendre de cet espace imaginaire, si nous voulons en étudier les bornes, sans le recours à un autre ordre (E. p. 70). Le traitement de l'imaginaire par la phénoménologie sartrienne nous paraît bien désuet aujourd'hui si on recourt aux catégories robustes proposées par Lacan [34]. M. Merleau-Ponty nous paraît mieux inspiré, lorsque, à l'extrême de son itinéraire, il découvre entre visible et invisible un nœud et un chiasme [30]. Cette découverte peut faire reculer certains puisque à ce moment d'achèvement, il rencontre la mort. Pour notre part, nous prenons soin, à l'entrée de la caverne, de la psychanalyse, d'en bien indiquer les éléments et la logique pour éviter aux professeurs de philosophie et à quelques autres, sinon de reculer, du moins de ne pas tomber dans l'égaré d'une mauvaise politique puisqu'il est nécessaire pour eux d'accomplir un acte qui ne soit ni passage à l'acte ni action dans le fantasme. Cet ordre autre de l'esthétique baroque n'est pas folie de voir [18] mais rationalité de l'instance de la lettre et logique.

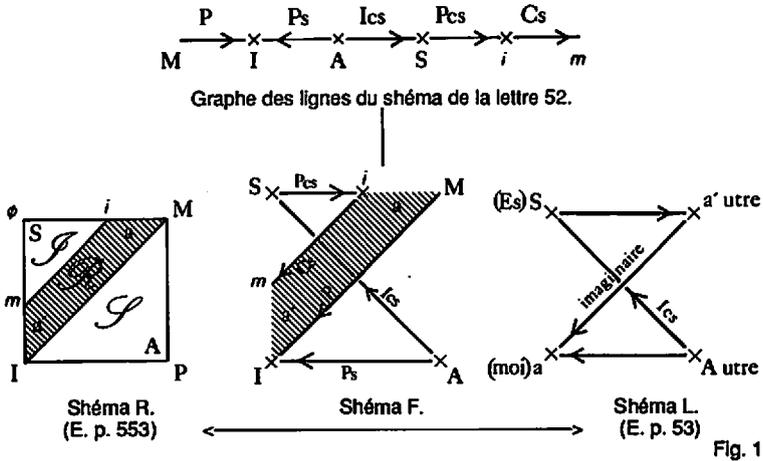
Cet espace imaginaire est structuré par l'apparition et la disparition de traits. Parmi les éléments essentiels que nous pouvons compter entre le corps et l'image, le pénis va jouer une fonction de médium par sa présence ou son absence, comme l'image du rival, cet autre imaginaire, mon semblable. Pour cette raison, nous articulons avec insistance une structure dans cet espace. Cet espace est fait de tension subjective, il a un corrélat temporel habité par l'angoisse. Ses modes imaginaires donnent sa consistance à la connaissance spéculaire, faite de dépersonnalisation et d'hallucination du double, ces modes sont le fondement paranoïaque de la connaissance humaine. Ils n'ont aucune pertinence dans le repérage du fantasme (E. p. 71).

Le fonctionnement des appareils optiques du Docteur Lacan est rendu par la dynamique de ses schémas L et R. Nous avons construit un schéma F qui prend ses termes dans les schémas R et L de Lacan, afin de les lier au schéma de Freud (voir Présentation de la série, pp. IV à VIII). Nous voulons parler du schéma dont la première version se trouve dans la lettre, numérotée 52, que Freud a écrite à son ami Fliess [1 b], et la seconde version dans la partie spéculative de *La Signification des rêves* [1 c].

Nous nous proposons à partir de ces schémas de situer l'Imaginaire dans la topologie du sujet. Le schéma de Freud est présenté ici par cette sorte de dual qu'est son graphe des lignes³. Sa linéarité importe essentiellement puisqu'il se propose de rendre

3. *Essaim*, p. 65.

compte de la succession des étapes de traduction dont se constitue, dans l'hypothèse de Freud, l'appareil psychique. Le processus de la traduction, bien connu dans sa pratique, n'est pas sans laisser quelques ombres. L'ensemble du fonctionnement de ces schémas, qui deviennent chez Lacan ceux de la structure du sujet, prétend rendre compte de ce processus. Comme dans toutes nos présentations topologiques, la traduction est présente intrinsèquement au schéma et le schéma est lui-même pris dans un processus de traduction. Voici les schémas en question.



- Les termes inscrits au-dessus de la ligne du graphe sont ceux de la lettre 52 de Freud.
 P : Perception. Ps : Perception-signes. Ics : Inconscient. Pcs : Préconscient. Cs : Conscient.

L'originalité de Freud est de distinguer entre P et Ps, *Warnehmung* et *Warnehmungs-zeichen* (E. p. 558). Notre propos est de rendre compte de ce que sont les perception-signes pour Freud, l'*einzigster Zug* freudien ou le trait unaire pour Lacan, l'endroit où se condense la structure au principe de la traduction, dès l'entrée de la caverne entre I et A. Cette distinction entre P et Ps peut être mise à l'épreuve par quiconque en présence d'un locuteur d'une langue étrangère inconnue. Celle-ci est perçue comme un flot verbal tant que l'auditeur ne peut y introduire de la distinction grâce à une découpe de séquences parce qu'il y reconnaît des mots et des phrases. La réalisation inverse de l'apprentissage d'une langue peut se produire pour un locuteur dans sa propre langue maternelle : c'est l'holophrase, le recours à des syntagmes figés. Ces instances freudiennes sont pour nous des stations dans le graphe de Freud où pour chacune d'elles vient jouer la structure. Celle-ci est présentée, dans cet ouvrage, en

termes de surfaces à partir de l'optique. Il s'agit de sa version la plus imaginative. Nous donnons dans le fascicule n° 0 une présentation de cette structure en termes de logique mathématique des moins imaginatives qui soient où sont mieux définies ces instances par leur opposition. Il y sera traité alors du problème difficile de la définition de l'inconscient et de ce qui fait sa difficulté pour un esprit kantien contemporain⁴.

- Les lettres portées en dessous du graphe proviennent du schéma R.

M : l'objet primordial (la mère). I : Idéal du moi. A : l'Autre. S : le Sujet (l'Es de Freud). *i* : l'image spéculaire (l'autre du miroir, le moi idéal). *m* : le moi.

Ces éléments ne trouvent leur définition véritable qu'à partir de l'articulation logique⁵ et de sa pratique de lecture (traduction). En particulier, la question de l'Autre, dans sa définition, reste comme pour Ics nécessiter une articulation freudienne originale. Ces éléments ne sont ici que situés dans une topologie qui nous met sur la voie de cette articulation du fait de l'éprouver par la lecture des graphes, des surfaces jusqu'aux nœuds. Ceci est affaire de style.

Les premières notations désignent les segments ; les secondes les points.

Les raisons du pliage de ce schéma en notre schéma F sont données dans notre lecture de Lacan [37 b].

- La trame que nous avons placée dans le schéma F vient du schéma R.

- L'orientation que nous donnons au schéma de Freud vient du schéma L. Dans le schéma L, à suivre cette orientation nous parcourons deux trajets différents ayant mêmes extrémités. L'un est direct, *Aa* ; l'autre indirect, *ASa'a*. Ces deux trajets illustrent le fait qu'un message issu de l'Autre, à emprunter deux parcours différents, arrive en a présenté selon deux versions. En suivant le trajet indirect le message passe au travers de l'inconscient et du Es freudien pour atteindre le moi. Il va être marqué du poinçon du désir (rêve) qui lui donnera le profil de sa déformation. A comparer cette version à celle qui a emprunté le trajet direct (matériau diurne), il peut y avoir interprétation, à la manière dont Champollion a traduit la pierre de Rosette. Cela à s'intéresser plus à la déformation du message qu'au sens du message lui-même. Ainsi nous pouvons situer la remarque de Freud ([1 n], pp. 236-237) qui dit que le refoulé inconscient peut communiquer avec le moi par l'intermédiaire du Es (S).

4. *Nons*, fascicule n° 0.

5. *Nons*, fascicule n° 0.

Dans un premier temps, dans le couple aa' de son schéma L, Lacan notera a' l'autre, l'image spéculaire, pour réserver la lettre a au moi (E. p. 53). Ce sont les termes entre lesquels, d'eux, est tendue la relation narcissique.

Immédiatement après, il situe ces lettres a et a' dans la zone \mathcal{R} , du schéma R (E. p. 553), mais il inverse leur place.

Dans le schéma L, Lacan situe la relation imaginaire, il l'inscrit entre a et a' .

A propos de ces deux petites lettres qui se retrouvent dans le schéma R, Lacan parle alors du couple imaginaire aa' (E. p. 577).

Auparavant, dans le schéma L, il nomme aussi ce couple aa' , gril imaginaire (E. p. 55), et c'est à ce propos qu'il introduit cette topologie plus appropriée afin de "définir le statut de a et de a' en eux-mêmes".

Le problème topologique à résoudre consiste dans la construction de l'objet a , qu'il faut strictement différencier du moi, noté m — il n'est que la métonymie de cet objet —, et de l'objet spéculaire, i — il enveloppe l'objet a subissant sa tension. Ce sont les deux termes du processus de l'identification. Freud s'aperçoit de la portée beaucoup plus générale de cette transformation qu'il rencontre dans la mélancolie. Il définit l'identification à l'occasion de cet objet qui jette son ombre sur le moi. C'est encore une question d'intérieur et d'extérieur, ce que je ne peux pas avoir, je le deviens. L'erreur des post-freudiens a consisté à réduire la pratique de l'analyse à simplement épeler les identifications qui forment cet oignon qu'est le moi. Ils ne savent plus où se tirer lorsqu'ils atteignent le noyau qui est rien, alors que ce rien ne vaut pour nous, comme nous allons le montrer, que par le mode dont on l'a serré qui n'est pas rien.

Dès le stade du miroir, l'image qui importe est l'image du corps. Elle est notée, au final, $i(a)$ dans l'algèbre de Lacan; c'est l'image spéculaire. C'est l'autre du miroir, mon semblable, mon prochain, est-ce moi-même ?

L'expression algébrique $i(a)$, par laquelle Lacan note l'image spéculaire, est un mixte, produit à partir du i du schéma R et du a du schéma L. Elle se trouve dans le graphe du désir (E. p. 808).

Mais il y a plus, il s'agit d'une écriture fonctionnelle, où la constante a vient occuper la place de l'argument de la fonction $i(x)$. Cette fonction est-elle la fonction identique, l'identité de nos livres d'algèbre ? L'écriture adoptée est plus élaborée puisque maintenant la lettre a se distingue de l'image spéculaire proprement dite.

Cette image $i(a)$, au contraire, enveloppe l'objet a , comme le moi se constituant par des identifications successives, à la manière des pelures d'un oignon, réglées sur la succession de ses objets. Freud a découvert ce processus à l'occasion de la mélancolie. Il lui

trouve, par la suite, une portée beaucoup plus large. Cette écriture fonctionnelle permet de noter l'enveloppement successif de ces objets. Ce sont des images qui se composent à la manière des fonctions,

$$i(i_n(\dots i_2(i_1(a)) \dots)),$$

telles les figures de l'autre imaginaire (E. p. 553).

D'autre part, nous n'hésiterons pas à évoquer à son propos la construction des nombres complexes à partir des nombres imaginaires, où la lettre *i* est une convention reçue. C'est vers un imaginaire de ce type, à la manière des nombres complexes, que nous nous dirigeons. Un imaginaire pas si imaginatif que ça puisque nous le rapprochons de la fonction de ce nombre, dans la résolution des équations algébriques. Il autorise l'existence de solutions fictives qui en révèlent d'autres effectives (S. XXII).

Ce qui est d'eux commence à deux. Il suffit de deux miroirs parallèles pour obtenir une infinité d'images en abîme. Il est juste alors de ne pas être fasciné par cette infinitude et de ne pas céder au vertige de la tradition réflexive. Il faut surtout noter qu'il suffit que les miroirs soient deux pour obtenir cet effet. Le problème est le même dans le couple, ou dans le groupe, lorsqu'il s'agit de lui faire faire un. C'est la plus faible acception de l'amour, celle qu'il ne faut pas, la soumission et le désistement. La question revient à dire de quel type d'un il s'agit. Nous voulons situer notre départ à ce recoupement du biologique et du social. Au moment de la résurgence de la sexualité par la chaîne des rêves chez les garçons, ceux-ci affrontent en équipe le déduit amoureux. Seule occasion de distinguer le d'eux du deux, puisque les filles parent à l'urgence de leurs assauts en s'appariant entre elles. Pour être secondaires, ces faits n'en sont pas pour autant négligeables, et la question reste de savoir comment ils se nouent avec le processus premier.

L'espace imaginaire consiste en l'étoffe triangulaire tendue entre les trois termes du schéma R que sont la mère M, son désir (représenté par le phallus F comme par le rival fraternel *i*) et l'enfant situé à la place I (E. pp. 182 et 552), la zone *S* du schéma R.

Nous construisons les traits définissant la métaphore qui vient traduire ce dernier triangle dans la zone *S* du schéma. Elle doit articuler la manière dont le signifiant du père vient assumer la fonction de puissance et de tempérament, qui arbitre la tension jalouse, au fondement de cet espace. Ces traits définissent la fonction imaginaire du phallus telle qu'elle est présentée sur les fresques de la villa des mystères à Pompéi. Cette structure est celle de la pudeur, à laquelle nous apportons quelques précisions. Nous l'avancions dans l'articulation de l'ensemble des schémas. Elle se joue, dès l'entrée de la caverne, entre I et A, en Perception-signes.

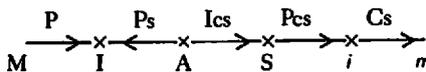
A l'occasion de ces schémas, tels que nous les présentons nous devons distinguer deux moments.

(A) *Incidence de la répétition*

Le premier moment consiste dans le fait de plier et déplier le graphe de Freud, afin de rendre compte de l'articulation dans l'analyse de l'historicité et de la structure ([29 c], pp. 158-163). Nous reparlerons, avec plus de précisions, de cette incidence dans notre chapitre IV. Il s'agit de l'insistance (d'eux) répétitive, dans l'histoire du sujet, de l'effet d'une structure, elle-même répétition (deux).

Freud a tracé son schéma pour rendre compte de l'élaboration de l'appareil psychique par des traductions qu'il faisait correspondre à des âges successifs de la vie du sujet. Prêtant par là à une interprétation en termes de stades, dans laquelle les psychanalystes post-freudiens se sont précipités. Il faut dire que Freud n'a jamais résolu le problème de la fermeture nécessaire de son schéma ([1 c], note p. 460).

Lacan propose de fermer ainsi ce schéma, comme nous l'avons déduit de la lecture de ses schémas R et L, résolvant ainsi un certain nombre d'antinomies freudiennes.



Graphe des lignes du schéma de la lettre 52.

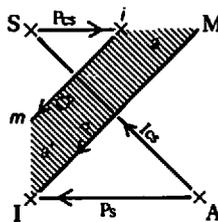


Schéma F.

Fig. 2

Comme dans la pratique, s'agissant de la surprise provoquée par la résurgence de l'événement psychique, l'orientation, donnée ici au schéma de Freud, paraît énigmatique puisqu'elle présente une seule flèche en sens contraire des autres. Or avec le pliage les orientations de chaque arête commencent à prendre leur sens à la lecture, si nous nous reportons au schéma L d'où, comme nous le disons plus haut, elles trouvent leur source.

Hors une esquisse de solution du nouage de la Perception et de la Conscience, dont le problème fait la consistance imaginaire qui

reste en travers de ces schémas, cette structure nous défait des prétentions génétiques ou évolutionnistes, avec les prétendus stades. Car ce qui est avant et ce qui est après peuvent s'identifier et se différencier.

Rappelons l'exemple de l'Idéal du moi et du surmoi qui fait encore problème à beaucoup de psychanalystes néo-lacaniens pour ne pas parler des post-freudiens. L'Idéal du moi relève d'une identification préalable au complexe d'Œdipe, identification première, que les psychanalystes post-freudiens traducteurs de Freud, en français, ont cru pouvoir dire être sans choix d'objet préalable. Le surmoi est dit, par Freud, l'héritier du complexe d'Œdipe. Comment ces deux instances peuvent-elles n'en former qu'une pour ceux qui croient encore au stade pré-œdipien. Une autre dimension est nécessaire pour ordonner le matériel, sans avoir à supporter la culpabilité comme contre coup d'une faute logique. Ces stades "ne sont pas, bien entendu, inexistantes mais analytiquement impensables" (E. p. 554) du fait de la structure. L'objet mobile de l'identification première à l'Idéal du moi, qu'est le père pour le garçon, en I du triangle \mathcal{S} , lui vient secondairement du triangle \mathcal{J} . Il n'est pas étonnant qu'à la place de cet objet les post-freudiens ne trouvent qu'un vide (introjection) tant que l'Œdipe reste inachevé (névrose) faute d'une analyse aboutie. Nous voyons ainsi l'importance extrême de la distinction introduite par Freud, soulignée par Lacan, entre Idéal du moi et moi idéal, car cet objet inexistant c'est l'Idéal du moi enveloppé d'une voix, d'un lambeau de discours ; il était déjà là.

Ce matériel est de langage, il est marqué de l'effet de la traduction, en chacun de ses éléments comme dans leur ensemble. Qu'il aille au corps ou à la pensée, il est agi par la répétition freudienne. Ce terme extrême, introduit par Freud lorsqu'il radicalise sa position, ce à quoi le conduit son hypothèse de départ du signifiant produit par la traduction même.

En fait d'évolution dans le développement historique, représenté par le schéma de Freud (fig. 2), il y a bien une répétition récurrente. Celle-ci est, dans la diachronie (histoire), la métonymie du désir. La topologie du sujet (structure, double boucle de la répétition) s'est projetée dans l'instant du fantasme (E. p. 836). Le problème, dans la pratique de l'analyse, est précisément de rendre compte du matériau ainsi développé. Il dépend de cette autre répétition à double coude dont rend compte le second schéma.

Dans la synchronie de la structure, le schéma F présente en une sorte de fixité ce qui se répète, soit le désir irréductible déterminé par une condensation. Cette construction, produite dans un autre lieu, agit et légifère dans la diachronie. D'où l'insistance de la répétition.

(A') *Composition de Perception et Conscience*

Dans cette autre dimension un autre moment se trouve entre les deux schémas de Lacan, non sans identité avec le premier moment de la répétition, puisque c'est lui qui se répète.

Il s'agit de l'articulation des différents modes de la composition de la perception et de la conscience. Nous avons formé le schéma F afin de présenter cette composition. Deux solutions s'offrent alors avec leurs relations mutuelles.

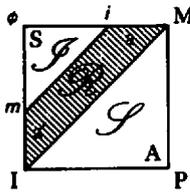


Schéma F.
(E. p. 553)

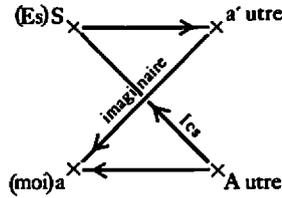


Schéma L.
(E. p. 53)

Fig. 3

Le lecteur ne peut se saisir de la première, présentée par le schéma R, qu'après avoir placé le schéma F dans l'étoffe qui convient, comme nous le montrerons dans notre Conclusion, l'étoffe du plan projectif.

Une autre solution, présentée par le schéma L, est la rétraction de la réalité psychique et de la difficulté que représente pour Freud cette zone dite \mathcal{R} . Il y va de l'élosion (*fading*) de ce qui se répète, en une insistance de fiction.

La mise en place du schéma F, à la surface du plan projectif, servira à la monstration de la relation qu'entretiennent ces deux solutions et se propose bien comme une réponse à la question posée. La rétraction de la zone \mathcal{R} , soit la traversée mutuelle des deux segments P et Cs, présente une dynamique de la coupure à la surface du plan projectif.

Il est bien évident que cette passe ne peut s'entendre qu'à la condition de placer ces schémas dans les étoffes dont nous nous proposons l'étude.

a" - *Etoffes*

Le sujet est terme de science. Dans un article ([19 a], p. 365), salué par Lacan, Georges Canguilhem fait partir de la biologie d'Aristote sa présentation de la psychologie. Puis il situe la position du sujet selon Descartes, dans les failles de la raison mathématicienne et mécanicienne. Il fait supporter au sujet la responsabilité de l'erreur dans l'expérience. Pour que l'on puisse

parler d'une erreur, il faut que soit défini un champ de rationalité. Si le monde est rationnel et si je ne suis qu'un élément de ce monde, rationnel moi-même, comment puis-je me tromper ? La raison est, pour Descartes, mathématicienne. Ainsi la question du sujet paraît lorsque je me demande : "Comment puis-je ne pas comprendre une démonstration de géométrie ?" Le sujet n'est pas le même selon l'étoffe d'où il se produit. Ce fut à partir de Galilée que cette étoffe devint mathématique, où le sujet ne peut plus être interprété comme du même Dieu. Dieu dont l'existence, par opposition à l'être, est nécessaire pour que quiconque pense recourir à cette mathématique. Lacan développe la question du sujet à partir du témoignage de Descartes. Les psychologues ne se rendent pas compte de la nécessité d'une mathématique pour seulement pouvoir parler de sujet. Même si celui-ci se trouve vite recouvert d'une enveloppe.

Dans l'un de ses écrits (E. pp. 793-827), au moment de clore le premier chapitre topologique de son enseignement, alors qu'il a déjà, pour son séminaire, ouvert le chapitre suivant où il commence à présenter la structure en termes de surfaces, le Docteur Lacan distingue deux modalités de l'étoffe.

1) Il y a le fantasme, écrit $\$ \hat{\circ} a$. Il est, dans cet écrit, dit "l'étoffe" du sujet de l'inconscient, $\$$ (du refoulement originaire) (E. p. 816). Ce sujet se saisit de l'élosion (*fading*) de l'acte d'énonciation. Cette élosion produit le renversement des termes dans le schéma R au moment de sa transformation en schéma L. Ce moment est instantané, il n'est pas stable, l'élosion est fugace. Le fantasme, dans son ensemble, fait étoffe au mode de fermeture propre à l'entrée de la caverne, condensé dans le poinçon $\hat{\circ}$. Il nécessite la structure de surface unilatère.

2) Il y a l'objet a, une constante au sens mathématique du terme, un objet au sens de la théorie des ensembles. Il est "l'étoffe" du sujet, qui croit pouvoir se saisir dans l'indicateur (*shifter*), marquant le changement de place, du sujet grammatical dans l'énoncé (E. p. 818). Cet objet est tendu entre l'objet de la phobie et le fétiche (E. p. 682). Il est contourné par la dérive (*Trieb*) de l'inconscient. Cette mention de l'étoffe faisant doublure (revêtement), se présente dans notre topologie en une composition de la Perception et de la Conscience présentée par le schéma R. Cet objet se projette dans la diachronie (histoire), en une répétition récurrente où il court, tel un furet au bois du désir. Il se produit un renversement à son propos, entre la fonction *i* et son argument *a*. Il relève d'une structure de surface bilatère.

Il peut paraître contradictoire, alors qu'il n'est que contraire, de mettre en correspondance les quatre surfaces topologiques intrinsèques élémentaires (sphère, tore, plan projectif, bouteille de

Klein) avec les objets (sein, scybale, regard, voix) des trois pulsions relevées par Freud (orale, anale, scopique) supplémentées d'une quatrième par Lacan (invocation). En effet si ces surfaces élémentaires sont bilatères pour deux d'entre elles, cela correspond bien à la structure du dit objet a ; les deux autres sont unilatères, simplement plus proches de la structure du fantasme, elles n'en sont pas moins objet a , mais justement nécessaires à situer la place du désir. Ces quatre objets a sont à élaborer dans la tension entre l'objet de la phobie et le fétiche. Il faut ajouter qu'entre $\$$ et a se produit un renversement noté par le \emptyset . Ici la causation du sujet, dont l'analyse peut se résumer à dire quelles relations entretiennent les surfaces bilatères et les surfaces unilatères [37 h].

2. Le mirage classique et le mirage topologique

Nous prolongeons la lecture des schémas en les plaçant sur des étoffes, à suivre le second chapitre topologique (1961-1971) de l'enseignement du Docteur Lacan. Il recourt alors aux surfaces topologiques intrinsèques et à la logique mathématique, et apporte une plus grande précision au concept de dimension.

Nous étudions les étoffes au moyen de coupures, comme cela se fait en mathématiques pour les surfaces topologiques intrinsèques, car les structures de surfaces sont des propriétés de connexion et de connexité.

a - *Lacan et les jeux de la dimension*

Par conséquence de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques, pour qu'une étoffe présentant une seule face puisse être rendue bilatère, il suffit d'une coupure fermée qui fait cercle et d'une seule. Cette coupure doit être effectuée selon un trajet qui consiste dans l'étoffe.

Les surfaces topologiques intrinsèques sont ces étoffes, dont la structure est livrée par des coupures. Les coupures révèlent la structure de surface des étoffes, leur dimension et, plus précisément, leur genre. Les coupures font les surfaces. Pour Lacan, les coupures sont les surfaces.

Entre étoffe bilatère et étoffe unilatère, l'enjeu d'une autre modalité de la dimension deux tente de se nouer, comme nous le développerons au chapitre III.

Si les faces d'une surface avaient une bonne définition, il serait intéressant de dire leur dimension. Or, il suffit dans chaque cas d'une coupure de dimension un, pour séparer une face en deux faces non connexes. La face serait-elle un objet de dimension deux

d'un genre intermédiaire entre les étoffes ? Nous pouvons la considérer ainsi, mais à la définir d'abord. Le nombre de faces est un invariant intuitif, il correspond à la caractéristique bien construite des surfaces orientables ou non orientables. Inversement, afin de donner à la notion de face quelque substance pour l'intuition, il est tentant de la rapporter à la doublure qui correspond au revêtement. Il y va d'une activité assez cruelle, du fait de décoller la face de la surface que nous écorchons en une sorte de pelure.

Cette seconde étape tente d'apporter la précision souhaitée dans la définition de cette autre dimension, il s'agit plutôt d'un genre intermédiaire. Les deux moments freudiens, que nous présentions précédemment en termes de schémas, se confirment dans cette nouvelle formulation en termes d'étoffes.

Le premier de ces moments distingue et réunit les deux versants du langage, celui de la synchronie (structure) et celui de la diachronie (histoire).

En deçà de notre étude détaillée, qui conduit à la construction de la structure du langage, selon son versant métaphorique (synchronique), nous prenons appui ici non pas "du sens d'avant le sujet", qui relève de ce premier versant, mais du matériau, de l'étoffe, de la consistance de surface, soit de "cette jouissance où le sujet se produit comme coupure", et dont l'introduction comme concept du discours de la psychanalyse date de 1958, à l'orée de ce second chapitre topologique.

Cette substance, ni étendue ni pensée, où se produit la coupure ne serait-elle pas plutôt substance jouissance, en tant qu'il ne s'agit plus du sens senti ou compris mais du sens à effectuer ? Cette jouissance, nous commençons à en faire la théorie à partir de ces éléments d'étoffes qui sont pour nous moyens, commodités. Elle fait étoffe où se produit la coupure du sujet, dans cette présentation que nous ne saurions prendre pour une représentation de la structure, malgré ce support substantiel de l'étoffe, mais que nous prenons comme une étape dans la transposition. Par la suite, au travers des nouages de cette étoffe, le nœud deviendra coupure lui-même. Cette coupure, notre nœud, est structure de "surface liée au corps" (*Radiophonie*, p. 70).

Auparavant, cette version de la structure en termes de surfaces court jusqu'à la rédaction de *L'Étourdit*.

a' - *L'Imaginaire c'est le corps*

L'événement premier de l'incorporation a pour effet insurmontable le foulement originaire. Il faudrait qu'il soit bien entendu en quoi pour nous ce qui est premier se distingue du

processus primaire. Car ce qui est primaire n'est pas nécessairement premier.

Le corps propre, mon support organique, ne peut être dit corps que du sein du langage. Une image est dite, dans le langage, qui fait le corps, corps. Ce corps du symbolique, de s'incorporer au corps propre, le fait corps. Il en va ainsi des corps, ils participent du décor dans la réalité faite de langage. L'incorporation répond à la prématuration du mammifère humain qui constitue la composante réelle de ce qui le caractérise. Cette déficience organique fait du mammifère humain un être foncièrement arriéré. C'est par le recours au signifiant, à la structure du langage, qu'il tente de surmonter cette insuffisance. Mais cette incorporation n'est pas harmonie, elle vise la totalité mais elle la rate, quoique cette totalité se dilate. Les enveloppements successifs des identifications constituantes du moi viennent se construire autour d'un reste incorporel et insistant. Nous appelons narcissisme l'imperfection irréductible des coutures de cette constitution de la personne.

Cette première structuration a des conséquences dans la chair et le corps. La constitution de cette institution enferme un cadavre dans un lambeau de discours.

Au ciel et sous la terre, l'ordonnement de la sépulture et les chemins de la voie lactée nous fournissent les termes déployés de la structure qui répond à la dispersion du corps, à son démembrement caractéristique du narcissisme humain.

Sous la terre, la sépulture organise, autour de l'ensemble vide des ossements, les attributs de la jouissance du défunt en un ensemble de parties (*Radiophonie*, p. 62).

Au ciel, le nom est produit. Il est l'effet du ravissement comme une condensation à propos d'un mot, qui ne se trouve qu'à bien compter les éléments articulés en un espace de compositions. Inversement un ruissellement de lettres se précipite par la rupture du nom, d'où la réalité s'en trouve éparpillée en flocons élémentaires. Il est ainsi une autre fonction du nom, différente de la référence, celle-ci ne valant que du discours, soit de la métonymie (*Litwatterre*). Cette fonction-là du nom est plus proche de l'insulte et relève de la métaphore lorsqu'elle nous ravit à se produire dans cet autre lieu.

Freud découvre à la réflexion de son appareil psychique, la nécessité de ce que Lacan décrira comme un cycle climatique. Ce cycle rend compte, d'entre les schémas, de l'incidence de la structure du refoulement dans la transposition des éléments. Un défaut de coupure dans sa régularité provoque son accomplissement dans la réalité, le ravissement du sujet qui n'a pas su trouver le nom et reste éparpillé. Ces formules imagées traitent des deux opérations qui causent du sujet. Ce sont l'aliénation et la séparation dont nous pouvons rendre compte au travers de la

multiplicité des étoffes et des problèmes qu'elles nous posent (aliénation) en une présentation non excluante (séparation). Cette étape est nécessaire à propos du corps entre les miroirs et l'un nœud.

A l'occasion de deux des principaux essais de sa seconde période, Freud précise la fonction des surfaces dans son œuvre écrite (*Au-delà du principe du plaisir*, chap. IV et *Le Moi et le Ça*, chap. II).

Dans *Au-delà du principe du plaisir* [1 e], leurs fonctions consistent à séparer un extérieur d'avec un intérieur, il s'agit d'une enveloppe. Pour le lecteur, le risque de se référer à la sphère, de manière exclusive, étoffe bilatère de genre nul, nécessite, pour nous, de signaler dès maintenant qu'il existe, subvertissant cette fonction trop simple des surfaces, d'autres structures des étoffes de la topologie.

A cette occasion, Freud distingue les traumatismes provenant de l'extérieur des traumatismes provenant de l'intérieur. Sans chercher à rétablir la vieille théorie du choc, il tend ici à dire autre chose d'essentiel. Le premier traumatisme reste, d'après Lacan, provoqué par le malentendu des parents (Œdipe). Car, dans le couple des parents, ceux-ci ne s'entendent pas crier. Ce malentendu est méconnaissance de la dimension de l'objet dans le cas général, cet objet qui imprime son profil vocal. Bien peu encore se saisissent de l'enjeu de faire de cet objet un objet de la théorie des ensembles, une lettre. Pourtant, il nous faut nous rendre compte de ce que endormir un enfant ou tirer à l'arc est un acte de lecture, d'écriture. Cette méconnaissance se poursuit avec l'identification qui prolonge ce geste en l'enveloppant d'autant plus que l'instrument devient métonymique, qu'il s'agisse de conduire une voiture ou de traiter un texte à la machine.

Freud distingue ainsi une surface perceptive, tournée vers l'extérieur, d'une surface de la conscience, enveloppant l'intérieur.

Protégeant l'appareil de l'extérieur, des couches se forment et s'endurcissent, par différenciation superficielle, pour que s'établisse un pare-excitations. Mais les sensations internes parviennent à la surface. C'est ainsi que le principe du plaisir tend à la liaison, à l'écoulement de l'excitation, l'appareil craignant d'être submergé des deux côtés.

Dans l'éventualité de trop fortes tensions venant de l'intérieur, un préalable comme l'angoisse vient du corps et "prépare" la surface en deçà. Freud va jusqu'à découvrir comment le sujet s'exerce par avance, au-delà du principe du plaisir, à de tels événements. Mais les choses se compliquent, car cela ne va pas sans provoquer quelques désagréments qui sont encore accentués par la culpabilité lorsque cet exercice et sa résolution sont éprouvés par le sujet comme une faute de logique. Cet au-delà est

le lieu de la répétition de cette tension verbale, autre nom donné à l'aspect du verbe [24], parmi lequel se compte l'accompli. Cette jouissance tensionnelle se résout en effet par l'accomplissement du désir qui caractérise le rêve et va au-delà du principe du plaisir ⁶. Cet accomplissement insiste dans l'appareil.

Dans *Le Moi et le Ça* [1 n], par un recours aux surfaces, Freud développe la tentative de résoudre la principale difficulté, constituée par l'achèvement (fermeture), rencontrée dans la construction de l'appareil psychique. Ce qui précède nécessite d'être situé dans ce contexte.

Il y est question d'une surface qui se dédouble par modification au cours de la construction de l'appareil psychique. Il y a d'abord la surface perceptive du corps propre (p. 230), encore ici celle-ci sépare un intérieur d'avec un extérieur, les perceptions, provenant de l'un ou de l'autre côté, sont du même type et donnent lieu à la conscience, à la surface de l'appareil psychique.

Ici encore, du côté intérieur, les processus de pensée et la conscience ne vont pas l'un vers l'autre (p. 231), ces processus internes introduisent une différenciation.

La relation de la perception externe au moi est manifeste (p. 233). Par contre, la relation entre la perception interne et le moi nécessite une recherche (p. 233), car cette surface double se projette dans le moi.

Freud nous dit que le moi n'est pas seulement une surface, pour montrer qu'il accorde une grande importance au fait qu'il soit une surface projection d'une surface. Mais un problème reste, il consiste à savoir en quoi cette surface double est une et deux surfaces distinctes, et comment peuvent-elles constituer, chacune seule ou à elles deux, la surface du ça.

Cette situation est décrite dans le cours d'une argumentation où Freud tente d'expliquer comment quelque chose d'inconscient peut devenir conscient. Il fait intervenir pour cela des représentations de mots dans le système préconscient, comme termes intermédiaires. Et c'est pour cela qu'il est amené à éclaircir les relations entre les perceptions externes et internes et le système superficiel Perception-Conscience (pp. 231-235).

C'est à cette occasion qu'il relève une difficulté du côté interne qui introduit cette modification du côté de la conscience, et qu'il en vient à se demander si la conscience est à rapporter au seul système P-Cs (p. 233). Il y a alors deux types d'intérieur.

Il est nécessaire de traiter de la régulation de cette modification, le moi prenant sa fonction dans cette régulation liée

6. *Nons*, fascicule n° 0.

au principe du plaisir (p. 233). Mais Freud introduit "un autre chose" qui se comporte comme une motion refoulée, et devient conscient sous forme de déplaisir (p. 234). Nous l'avons déjà rencontré dans cet au-delà du principe du plaisir. Et c'est à propos de cette tension qu'il situe la douleur comme tenant le milieu entre perception externe et interne, se comportant comme une perception interne alors que provenant du monde extérieur (p. 234). Il conclut que les représentations de mots servent à transformer les processus de pensées internes en perceptions (p. 235). Il y a donc rétroaction.

Vient alors la description nouvelle de l'appareil psychique constitué d'un ça : un sujet est un ça psychique Ics (p. 236), dont le système P-Cs constitue la surface. A la surface du ça, donc dans le système P-Cs, le moi est posé. Le moi s'est développé, ici encore, à partir des perceptions, par la continuation de la différenciation superficielle. Le moi s'est modifié à partir du ça sous l'influence du monde extérieur (p. 237). C'est le corps propre, et avant tout sa surface, qui est le lieu de perceptions internes et externes (p. 238). Il est à la fois un objet étranger, et livre deux sortes de sensations dont l'une peut être assimilée à une perception interne. Freud évoque, pour la seconde fois, l'expérience de la douleur que nous pourrions dire en l'occurrence être une expérience de double leurre. Il en déduit que le moi est avant tout un moi corporel (p. 238), un moi-corps (p. 239), et que le moi n'est pas seulement un être de surface, mais qu'il est la projection d'une surface (p. 238). La relation du moi avec la perception étant ainsi décrite, il reste à décrire la relation du moi et de la conscience. Freud fait état à cette occasion d'un renversement entre ce qui est bas et ce qui est haut à propos des valeurs morales.

Nous dirons qu'au départ nous sommes dans l'impensable situation du schéma L où perception et conscience sont identifiées. Il s'agit d'une surface unilatère qui devient bilatère en se dédoublant. Dans cet interstice se développe l'espace du moi. Sur le plan de coupe de la bande de Möbius, cet espace est lui-même une bande de Möbius. Il est de fait qu'un homologue de la surface bilatère, qui constitue le reste de la coupe mœbienne, se projette dans cette partie hétérogène. Nous étudions, dans ce chapitre de topologie des surfaces, les différentes figures de cette solution. Il s'agit de la doublure d'une surface construite comme un revêtement (voir chap. VII, p. 236).

Mais d'autre part, déjà dans son schéma de la lettre cinquante-deux à Fliess et dans le schéma optique de *La Signification des rêves*, les termes Perception et Conscience sont aux extrémités. Notre premier problème est donc bien de revenir sur leur mode de disjonction et de conjonction. Ce problème topologique des étoffes

donne les conditions de possibilité et d'impossibilité de la pratique même de l'inconscient. Celui-ci ne pouvant en aucun cas être rendu conscient, il ne saurait se prêter à une investigation qui nous laisse toujours du côté de la conscience. Cela fait paradoxe, et dans cet essai Freud décrit ce passage grâce aux représentations de mots dans le système Pcs. Il indique déjà par-là en quoi la solution tient à la logique et à la topologie de l'ensemble des schémas, qui manifestent le processus de traduction. De plus, pour nous, ces représentations de mots, situées en Pcs dans cet essai, sont connexes des perception-signes de Freud, ou des lettres pour Lacan, placées dans les schémas, à partir de Freud, dès l'entrée de la caverne entre I et A en Ps. Cette seconde difficulté s'éclaire par l'identification de Pcs avec Ps lors de la fermeture des schémas R et L selon les indications de Lacan à la surface du plan projectif, sur une bande de Moëbius par exemple. Ce dont nous rendons compte dans notre Conclusion.

Nous nous écartons sensiblement d'un sens trouvé dans un modèle à l'intérieur de l'organisme, tel qu'il pouvait être supposé avant l'effectuation de la présentation des schémas. Nous suivons la pente d'un processus de traduction, assorti aux hypothèses de la doctrine dont nous traitons. Suivant, par-là, Freud qui s'y est entraîné dans sa propre pratique, et Lacan qui s'y est exercé dans son commentaire critique.

Dans la seconde période de son enseignement, le Docteur Lacan présente une construction qui affine le traitement de la répétition freudienne, non plus en termes de graphes, mais en termes de surface.

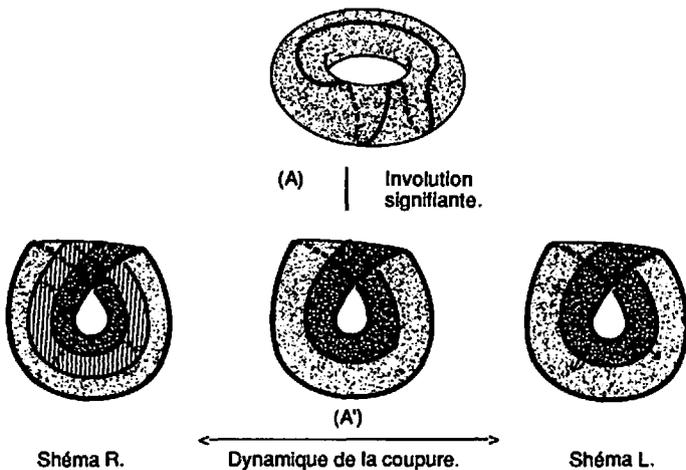


Fig. 4

Nous esquissons ici la présentation de la dynamique de la structure dans cette nouvelle version.

Dans cette même période, le recours aux variétés de dimension deux domine. Hors le passage des étoffes bilatères (tore) aux étoffes unilatères (bande de Mœbius), à la surface du plan projectif, la fermeture des schémas R et L offre des solutions au nouage de la perception et de la conscience. C'est dire que nous retrouvons les deux moments, (A) et (A'), de la répétition freudienne et de la composition de P avec Cs en une présentation de surface.

(A) *L'involution signifiante.* Tenant compte de cette autre modalité de la dimension, qui se joue entre surface bilatère et surface unilatère, le Docteur Lacan nous propose de traiter de l'incidence de la répétition. Il recourt à une transformation, par coupure, du tore (bilatère) en bande de Mœbius (unilatère). C'est l'involution signifiante, soit la copule entre ce qui est identique et ce qui est différent, présentée en termes de surfaces (leçon du Séminaire du 15 février 1967).

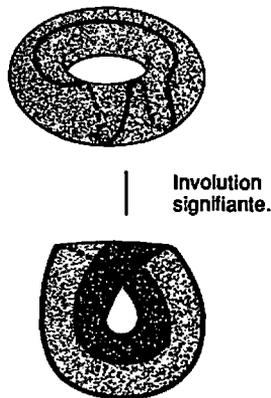
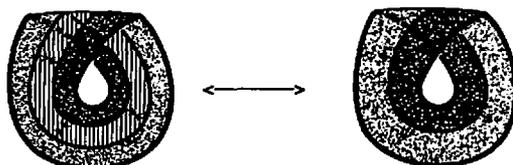


Fig. 5

Nous montrons dans le chapitre VII le détail de cette transformation. Lacan la condense en deux pages lorsqu'il écrit *L'Étourdit* qui achève cette période. Parallèlement il a construit en logique un opérateur ; celui-ci formalise cette copule unissant l'identique avec le différent, en termes de négations⁷.

7. *Nons*, fascicule n° 0.

(A') *La dynamique des coupures.* La coupure qui subvertit l'étoffe et la coupure qui ne la change pas.



Dynamique de la coupure.

Fig. 6

Notre chapitre de conclusion traite en détail des identifications des côtés et des sommet d'un graphes des schémas R et L dans l'étoffe d'un plan projectif présenté en une bande de Mœbius ou un carrefour de bandes. Dans notre Appendice nous traitons cette question à la surface d'un plan projectif immergé, présenté en cross-cap. Ces identifications autorisent que nous placions des trames dans les schémas R et L de Lacan. Elles indiquent que les zones \mathcal{J} et \mathcal{S} sont adossées comme les deux faces d'une surface bilatère (sphère, sphère trouée, tore coupé, tore).

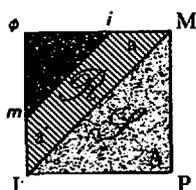


Schéma R.

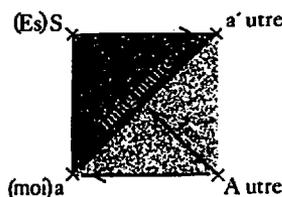


Schéma L.

Fig. 7

C'est dans ces conditions que peut se montrer la dynamique des coupures entre les schémas placés dans le plan projectif. Cette transformation redouble la précédente. Un renversement et une éliision se produisent, précisant par-là les composants de la copule. Confirmant encore que l'énigme recelée au centre de la caverne consiste bien dans le mode de sa fermeture à l'entrée de la caverne.

Le Docteur Lacan a ajouté une note au schéma R, lors de la publication des *Ecrits* en 1966, où il indique que "pour qui sait la suite, comme c'est le cas si on prétend s'en appuyer", — et c'est notre cas puisque nous prétendons nous appuyer du nœud — "ce que le schéma R étale c'est un plan projectif" (E. p. 553). Il est à remarquer alors :

1°) Les petites lettres, a et a' , sont situées dans la bande \mathcal{R} du schéma ; et la place du sujet, S , en un coin de ce schéma.

2°) Dans sa note ajoutée en 1966, il est dit que \$ est le représentant dans la formule du fantasme du champ \mathcal{R} , \$ est le représentant de la représentation de la structure, qui barre l'ensemble du schéma. Et de faire correspondre l'objet a aux deux zones \mathcal{J} et \mathcal{S} adossées l'une à l'autre en un disque sphérique, comme c'est le cas dans son dire au cours de cette période.

Il y a donc entre ces deux termes, le sujet et l'objet, un échange qui se voit à la surface du plan projectif. Nous le montrons sur la bande de Möbius, au chapitre VII (p. 242) et en Conclusion (p. 292); sur le cross-cap, dans l'Appendice (p. 323). Cela se produit si nous orientons la ligne de l'extension jusqu'à ce qu'elle se noue avec la ligne de l'intension, en une ligne sans points à l'horizon du plan projectif. Cet échange est plus largement développé dans l'Appendice (p. 304), où il se montre à condition de prendre quelques précautions.

Dans le cas où la zone \mathcal{R} est rétractée (schéma L), les deux zones \mathcal{J} et \mathcal{S} , soit l'objet a , occupent l'ensemble du schéma. Nous comprenons par-là comment le Docteur Lacan peut, en une équivoque dans sa note ajoutée en 1966, parler du champ \mathcal{R} "qui le barre". La construction de la phrase laissant ouvert de savoir si, ce qui est barré est l'objet a ou le schéma R. En fait, ils sont différents et identiques car le schéma de la structure du sujet consiste en l'objet a à l'état L. Le connecteur du fantasme comme équation du Symbolique à l'Imaginaire fait osciller ces termes. Ce connecteur reste à construire en logique, les éléments de notre fascicule n° 0 y contribuent, pour que puisse être présentée son effectuation dans la pratique.

Nous ne nous étonnerons plus à constater que de ce renversement entre les termes proposés, zones \mathcal{J} et \mathcal{S} , et de l'éliision qui l'accompagne, zone \mathcal{R} , d'autres couples d'oppositions soient le lieu de tels échanges et de disparitions, dans le dire de Lacan comme dans l'inconscient.

Le renversement produit par cette dynamique des coupures est d'autant plus proche de l'involution signifiante que celle-ci est l'occasion de tels retournements entre les lieux du dit et du dire, à la façon de Lacan.

Cela se poursuit jusqu'à la surface du tore lui-même, entre les trajets de la demande et du désir, comme nous le montrerons dans notre chapitre VI.

Les éléments nécessaires à la lecture de *L'Etourdit*, où Lacan nous entraîne dans ce jeu du dire au dit, se trouvent dans les quatre dessins de topologie des étoffes tracées plus haut (fig. 4).

Pour nous les choses deviennent lisibles lorsque nous nous faisons à la conviction que la bande de Mœbius est un plan projectif percé d'un trou imaginable comme rupture de surface. Alors l'ensemble des énoncés de Lacan se vérifie par des dessins. Nous pouvons ajouter aux figures qui précèdent les quatre présentations suivantes d'un trajet plongé sur le cross-cap, extrait de l'Appendice de notre ouvrage. Elles ont leur corrélat dans l'articulation des dessins précédents.

Ici il s'agit de l'extension d'un tour unique, autour d'un point hors ligne, jusqu'à la ligne sans points où celui-ci se traverse pour s'inverser. La ligne sans points présente une curiosité de la continuité dont la géométrie différentielle pourrait encore nous instruire.

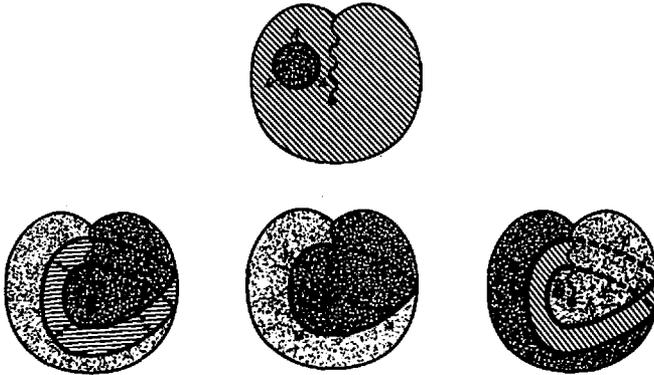


Fig. 8

Pourtant nous sommes de l'avis que le Docteur Lacan recourt à la structure du plan projectif du fait qu'il n'est pas représentable. Nous ne saurions dans ce jeu du dire au dit méconnaître la fonction du mi-dire. Il reste dans notre présentation un trou imaginable qui est mis en fonction. L'existence du nœud, dont nous poursuivons l'étude par la suite, fonde la pertinence de l'enseignement des moyens de cette lecture grâce au dessin.

Ces retournements de situation auxquels il faut être rendu attentif, et dont nous nous devons de rendre compte, ne doivent pas retenir le lecteur de tenter, au contraire du flou entretenu usuellement, d'établir des correspondances fermes entre les termes du discours analytique. Ces correspondances se font au risque de trouver par ailleurs la situation renversée et par-là semblées contredites. Dans notre topologie, nous pouvons écrire de telles circonstances sans inconsistance, sans être contradictoire. Il s'agit

d'une modalité de lettres propre à cette topologie, que caractérise l'éliision qui surprend.

3. Le passage, l'optique et...

Dans le tableau des éléments constituant l'Imaginaire, devrait venir maintenant la traduction de ce qui précède dans les termes du troisième chapitre de l'enseignement du Docteur Lacan (1972-1980) qui étudie le nœud. Mais comme nous réservons ce propos à la suite de notre série, il nous faut maintenant revenir au départ et introduire le narcissisme. Pour cela nous donnons un supplément à notre doctrine de la dimension topologique en introduisant l'existence extrinsèque, par opposition à la consistance ou insistance intrinsèques. A s'appuyer sur notre jeu de coupures au travers de l'étoffe, le narcissisme, défini entre intrinsèque et extrinsèque, est présenté alors d'une manière renouvelée. A suivre Lacan jusqu'aux plus extrêmes conséquences des hypothèses de Freud.

a - *Intrinsèque/extrinsèque*

La théorie classique des surfaces topologiques est une théorie des surfaces intrinsèques. Nous réservons notre chapitre II à son exposé d'ensemble.

Nous sommes en présence ici d'un nouveau couple d'oppositions : intrinsèque/extrinsèque.

La théorie des surfaces topologiques est dite intrinsèque parce qu'elle distingue ou identifie les objets en fonction de caractéristiques, ou encore d'invariants, dont la définition ne dépend pas de la situation de la surface dans un espace de plus haute dimension.

Ces caractéristiques ne varient pas lorsque nous déformons la surface ou la transformons dans l'espace où elle est disposée. Ces invariants sont donc aussi invariants au travers de transformations extrinsèques.

Le nœud du bord est au contraire une caractéristique exclusivement extrinsèque, il est défini en codimension deux, puisqu'une ligne (dimension un) peut être nouée dans un espace de dimension trois. Le nœud n'a pas d'existence intrinsèque pour n'être pas définissable pour la surface par rapport à elle-même. C'est l'éliision intrinsèque du nœud.

Pour donner une définition intuitive de ces notions, nous reproduisons un court passage de la thèse de A. Lautman, qui a su très tôt y trouver un intérêt :

"Les propriétés intrinsèques d'un être sont indépendantes de la position de cet être dans l'espace, elles sont même indépendantes de l'existence d'autres êtres : elles appartiennent en propre à l'être qu'on envisage.

Les propriétés de relation (extrinsèques) ne peuvent au contraire être attribuées à un être mathématique que si l'on se réfère à autre chose qu'à lui ; c'est tantôt un système de référence commun à plusieurs êtres ; tantôt un espace ambiant dont les propriétés peuvent être définies indépendamment de tout contenu, tantôt encore un certain nombre d'autres êtres qui soutiennent avec le premier des relations de voisinage, d'incidence, d'orientation, etc." [26].

Ce couple d'oppositions est déjà situé dans l'histoire de la philosophie platonicienne, même si celle-ci tente de suturer la difficulté qu'il présente sous l'aspect de l'éliision qui se joue entre ses termes. A cette occasion, Albert Lautman différencie les philosophies de Leibniz et de Kant.

Leibniz, qui a introduit le terme d'*analysis situs* dans la seconde époque⁸ de l'investigation topologique, suppose pouvoir ramener l'extrinsèque à l'intrinsèque. L'*analysis situs*, au sens de Leibniz, répond aux questions d'un genre bien précis. "Est-il possible de déterminer les propriétés de situation par la connaissance des propriétés de structure ?" C'est "l'espoir de déterminer ce qui concerne la situation par une analyse des propriétés internes de la figure". Pour nous il est frappant que le nœud du bord infirme cet espoir. Par contre le nœud laisse une trace intrinsèque à la surface.

Kant, pour sa part, fonde dans son esthétique transcendantale sa conception de l'espace sur la nécessité d'une référence universelle, la nécessité d'un espace standard. Il affirme ainsi une position qui crée, pour ceux qui ne s'en relèvent pas, de grandes difficultés dans l'abord de la topologie. Car la mesure, en géométrie euclidienne, est bien un invariant, comme cela est d'usage en toute catégorie mathématique, mais cet invariant numérique rapporte les objets à un domaine standard, créant ou se soumettant par-là à une hégémonie qui empêche par son évidence de se rendre compte de la mise en jeu de l'acte de traduction. Les mathématiciens restent très attachés à cette notion de standard puisque, en topologie où il n'est plus question de mesure, la structure de groupe (groupe d'homotopie, groupe d'homologie) comme invariant algébrique est encore privilégiée à côté des invariants numériques.

8. *Essaim*, pp. 23-24.

L'histoire des mathématiques et le développement des structures auxquelles nous participons infirment ces deux positions et l'on peut voir très facilement en quoi.

Nous conservons de Kant sa définition de l'universelle qui s'établit par un commentaire critique, c'est la consistance de la logique moderne. Cette universelle est la condition absolue qui fonde le fantasme. Sade démontre avec Kant que, si cette condition absolue est nécessaire au fondement d'un bien, elle peut servir à fonder aussi bien un mal exécration. Rversement de Kant dont il nous faut tenir compte pour situer une autre solution avec Freud.

Il faudra bien qu'un jour cet écrit de Lacan, Kant avec Sade, soit lu pour que l'on cesse d'agiter le fétiche de la cruauté qui réduit le désir afin d'éviter la castration. Rappelons que ce que l'on appelle fantasmes dans le discours courant aujourd'hui, ce ne sont pas des fantasmes au sens du discours analytique mais des fétiches, ce sont les images nécessaires au sujet pour assurer son excitation. Alors que le fantasme est une phrase articulée de laquelle dérivent les symptômes. Kant et Sade ne sont pas au-delà du principe du plaisir, ils en règlent l'économie critique. Et Sade ne fait que montrer en quoi l'esthétique de Kant se retourne comme un gant.

La topologie introduit à première vue une variation entre l'intrinsèque et le standard extrinsèque. Cette variation se noue selon certains traits de structure qui se répètent. De ces invariants le sujet se saisit de la structure.

Contre Leibniz, les propriétés extrinsèques ne peuvent être réduites dans l'intrinsèque, elles s'estompent pour disparaître et cela justifie la création par Poincaré de la topologie algébrique⁹.

Contre Kant, nous ne trouvons pas d'autre universalité que la consistance relative et d'absolue qu'une trivialisation (effacement dans l'intrinsèque). Ce qui ne fait pas référence.

Nous utilisons pourtant les étoffes par la suite dans l'étude des nœuds où une surface d'empan est une surface avec un bord, puisqu'elle est construite à partir d'un nœud ou d'une chaîne.

Nous parlons du bord (singulier) de la surface, son nœud ou sa chaîne sont dénommés ainsi selon le nombre de composants de ce bord. Lorsqu'il y a un composant nous parlons du nœud de bord, et nous employons le terme de chaîne de bord lorsqu'il y a plusieurs composants.

La théorie des surfaces topologiques peut être faite en termes de surfaces à bord ou de surfaces sans bord. Il y a une stricte correspondance entre les deux versions de la théorie.

9. *Essaim*, p. 149.

Nous privilégions la version de la théorie des surfaces topologiques avec un bord pour suivre Griffiths [3] et parce que nous visons par cette étude la topologie du nœud. Mais nous indiquons la correspondance entre les deux théories.

Il y a encore une raison majeure à cette préférence : c'est qu'une quelconque surface à bord peut être plongée dans l'espace supposé intuitif de dimension trois.

Plongée, c'est dire qu'elle est disposée sans présenter de point multiple dans cet espace. Cette présentation constitue dans ce sens une présentation injective de cette surface, dans laquelle chacun des points de la surface est distinct des autres, la surface est sans singularité.

Le couple d'oppositions pertinent à partir de l'existence extrinsèque devient celui du plongement et de l'immersion (il ne s'agit pas d'une différence topologique relative à la continuité, mais d'une différence sous-jacente en théorie des ensembles concernant le caractère injectif ou non injectif).

Nous n'approfondirons pas ici cette distinction car nous rejetons en Appendice (pp. 303 et suivantes) la présentation des surfaces immergées et nous nous contentons dans l'ensemble de cet ouvrage de n'étudier que les surfaces plongées. Cette façon de présenter les surfaces ne leur impose pas d'autre singularité qu'au moins un trou imaginable.

La distinction entre plongement et immersion est essentielle pour se saisir de la notion selon laquelle il n'y a pas de nœud en codimension un (une ligne dans une surface). Certes, nous pouvons immerger (points de recoupement) un cercle à la surface de la sphère de multiples manières mais nous ne pouvons l'y plonger que d'une seule façon, comme nous le montrons au chapitre IV. Nous pouvons plonger un cercle de multiples façons à la surface d'un tore, comme nous l'étudions au chapitre V, mais le lecteur peut déjà savoir que de manière intrinsèque à la surface torique ces plongements de cercle ne sont pas noués, nous le montrerons au chapitre VI par des équivalences intrinsèques de l'effet qu'ils produisent dans cette étoffe.

a' - Les narcissismes et le transfert

Dans la troisième période de son enseignement, le Docteur Lacan reformule l'ensemble du discours analytique en termes de nœuds. Les deux grands traits structuraux qui sont au fondement de ce discours, dont nous avons présenté l'articulation en termes de graphes et en termes de surfaces dans ce qui précède, sont alors repris dans l'espace du nœud. La suite de notre série de fascicules de résultats vise à donner les tenants de cette stylisation aux autres incomparable. Il ne s'agit plus de schémas, il n'y a plus de risque de

retomber dans la représentation. Avec le nœud, la construction de lettres aboutit, après ce lent serrage autour de sa question, à celle de l'écriture. Nous ne reprendrons pas ici ce qui précède en ces termes afin de le réserver pour la suite de notre série de fascicules de résultats.

C'est à revenir au premier geste, suivant par-là la logique présentée par ces schémas, que nous montrons l'enjeu de cette dernière étape en un commentaire en forme d'épure des trois schémas optiques du Docteur Lacan.

Les deux premiers sont commentés et construits dès le livre I du Séminaire, l'ensemble des trois se trouve dans un écrit (E. pp. 647-684).

Les trois schémas optiques offrent une présentation des deux narcissismes et du transfert.

Présentons le narcissisme. Au dire de Freud, il s'agit d'une attitude par laquelle "un individu traite son propre corps de façon semblable à celle dont on traite d'ordinaire le corps d'un objet sexuel" [1 i].

Cette définition est souvent comprise par les psychanalystes grâce au modèle optique du miroir qui produit une image du corps du sujet comme celui d'un autre dans l'espace du miroir. Mais cela laisse échapper la dynamique de la structure, la difficulté qui veut que le sujet tient au langage pour surmonter la prématuration (arriération) et qu'il y trouve un malaise plus radical en même temps que sa solution. Nous pouvons entendre le narcissisme humain d'une manière modifiée dans le deuxième schéma optique du fait de la différence introduite en topologie de l'intrinsèque à l'extrinsèque.

Dans son enseignement, Lacan a pris son départ de ces constructions optiques. Il les reprend et les prolonge lorsqu'il congédie de manière définitive toute interprétation des instances freudiennes de la structure du sujet en termes personnalistes (E. p. 683). Que ceux-ci laissent en dehors de leur champ l'aporie de la castration suffit à en montrer les limites.

Nous ne retiendrons du personnalisme que le départ de la théorie de l'identification. L'étymologie du mot personne que le latin rapporte au masque (*persona*) nous conduit jusqu'aux fresques des sépultures étrusques de la nécropole de Tarquinia où se trouve plusieurs fois présenté Phersu, l'homme masqué. Dans la "tombe des Augures", une fresque met en scène le jeu de Phersu d'où sont issus à Rome les combats de gladiateurs. Phersu tient au moyen d'une corde un autre personnage; si Phersu est masqué, l'autre a la tête enfouie dans une cagoule, et est attaqué par un

chien féroce dont il tente de se défendre avec une massue en bois ; son corps est déjà blessé par l'animal. Le même Phersu est présent dans "la tombe des jeux olympiques" et dans "la tombe du polichinelle". Dans cette dernière il est vêtu d'un costume au "décor à damier, où alternent les carreaux noirs et blancs". Sa tunique est constituée de plusieurs morceaux d'étoffe cousus ensemble comme nos surfaces topologiques intrinsèques présentées dans notre chapitre II.

Cette rencontre étymologique atteste en une image l'agression attachée au personnage et le morcellement lié de manière nécessaire à la personnalité. Il y a un lien de structure entre le moi, notre âme, cette pseudo-tendance d'unité, et l'agression imaginaire, érotique ; en fait il s'agit d'une tendance à la désunion. Où l'on peut apercevoir que le ravalement de la psychanalyse à une technique d'adaptation, sous la rubrique du moi renforcé dans son isolement, ne peut que jeter de l'huile sur le feu qu'elle prétend éteindre.

Nous apprécions avec un sourire consterné la remarque de tel responsable politique ou de tel journaliste qui nous dit trouver gênants chez Lacan les effets agressifs de son enseignement. Cette ironie serait encore un bon exemple de renversement dans la structure si elle n'avait pas des conséquences ravageantes pour plusieurs classes d'âges vouées à rechercher l'union dans la méconnaissance de l'effet pacifiant de la dysharmonie. Mais nous ne pouvons adresser ce reproche qu'aux spécialistes qui sont seuls responsables de cette opinion lorsqu'ils confondent l'acte et la violence, qu'un pacte sourd entretient : il n'y aurait pas de "signifiant nouveau". Lacan a su s'y opposer en son temps.

Ce lien entre le moi et la tension s'établit par l'intermédiaire des jeux du cirque à Rome, des sacrifices, du costume de polichinelle (phallus). La notion de personne, de masque est ainsi ce lien. "Quel fantastique cheminement que celui de Phersu, masque chargé d'une symbolique sacrificielle, broyée par le déroulement de l'histoire. Il aboutit finalement dans notre dictionnaire sous la rubrique «personne», permettant ainsi au spectre de Phersu de hanter pour toujours la langue française" [28].

Mais cette seconde construction optique peut être subvertie à partir du nœud entre intrinsèque et extrinsèque dans le troisième schéma de Lacan. Celui-ci nous signale dans son hommage à Wedekind que l'homme masqué est aussi un des noms du père.

(A) Premier schéma optique

Le Docteur Lacan inverse le schéma optique de Bouasse, dit du bouquet renversé, il en fait le schéma du vase renversé.

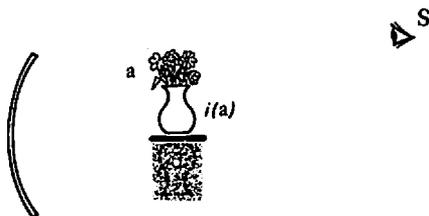


Fig. 9

Le vase réel est ici caché au regard, il est en dessous mais il peut être vu par un sujet se tenant au fond de la pièce, faisant face à la construction. Elle est faite d'un miroir sphérique qui permet d'accommoder l'image réelle de ce vase autour d'un bouquet réel. Cette petite organisation illustrera pour nous le narcissisme premier que nous qualifierons de narcissisme animal. Son étude relève de l'éthologie. Cette dimension n'est pas absente de l'Imaginaire de ceux qui parlent [17]. Autre chose est la structure structure:du langage, l'absence de métalangage.

(A') Deuxième schéma optique

Nous illustrons, après Lacan, la fonction du langage, la nécessité d'un métalangage, par le recours à un second miroir, celui-ci est un miroir plan.

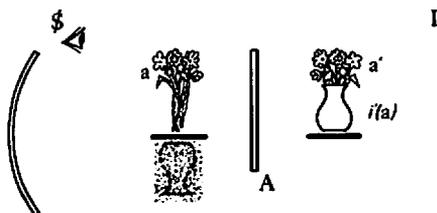


Fig. 10

C'est à disposer un miroir plan A, au milieu de la pièce face à la construction précédente, qu'un sujet S, se trouvant du côté du miroir sphérique cette fois, peut voir en une image virtuelle du bouquet a' , et du vase $i'(a)$, l'image réelle de celui-ci $i(a)$, accommoder son col autour du bouquet réel a. Le miroir plan, noté A, fait intervenir la modification de notre petite organisation en une machine présentant les traits structuraux du narcissisme

primaire. Ici, le vase est vraiment chose, le sublime, cul par-dessus col, est en dessous. Où se retrouve le renversement signalé par Freud à propos de l'inconscient entre ce qui est haut et ce qui est bas. Le vase n'en est pas moins inatteignable pour le regard direct.

Cette construction n'est pas aussi figée et banale que le croient ceux qui ne distinguent pas entre premier et primaire, et pour qui s'arrête l'intelligence du narcissisme, faute d'avoir accès à la dimension topologique de la différence entre intrinsèque et extrinsèque. Pour eux le corps n'est pris en objet qu'en une image symétrique et inatteignable.

Le miroir fait limite, et le masque est Phersu agaçant la personne de son acidité symétrisante. En fait, il n'y a pas de métalangage comme nous allons le voir, les deux miroirs n'ont pas la même fonction. Le premier laisse le regard être sujet intrinsèque au corps ; le second provoque une position extrinsèque avec les particularités de structure de cette position. Nous disons maintenant les conséquences de cet autre rôle rempli par le miroir A.

(A'') *Troisième schéma optique*

C'est à faire fi des jaloux et des médisants que nous pouvons saisir dans le transfert une autre fonction du miroir qui fait anamorphose, vue de biais, lumière rasante.

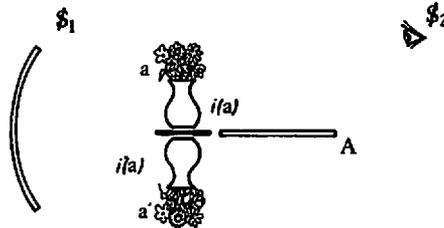


Fig. 11

Dans ce troisième schéma, le miroir A a pivoté d'un quart de tour. Le regard s'est déplacé pour revenir au fond de la pièce, en sa position impensable première. Alors il peut voir l'image réelle du vase $i(a)$, transmise par le miroir sphérique, se réfléchir comme dans un lac. Elle se dédouble pour être vue aussi en une image virtuelle $i'(a)$, en dessous symétrique où le vase est dans le Réel. Cette éclipse ne peut durer, elle est fonction de l'entrée de la caverne, retour à sa place, trivialisation instantanée, où le sujet se voit narcissé en un éclair. De ce fait, il n'y a pas de métalangage et ce modèle optique qui l'illustre offre une présentation de la structure de la castration.

Revenons maintenant à la différence entre les deux premiers schémas optiques, pour commenter leur articulation en termes topologiques d'analyse intrinsèque et extrinsèque. Le Docteur Lacan n'ignore pas cette distinction entre intrinsèque et extrinsèque, il la définit bien pour nous, quelque temps plus tard, en termes de sujet et d'objet. Cette distinction se trouve lorsqu'il constate qu'"un tore n'a de trou, central ou circulaire, que pour qui le regarde en objet non pour qui en est le sujet " (*L'Étourdit*, p. 42).

Le tore intrinsèque est une étoffe compacte, fermée, sans bord, il ne présente aucun trou. Seuls les trajets du groupe fondamental permettent d'en qualifier la structure, comme nous l'étudions aux chapitres III et V.

Il se trouve qu'il peut être vu de l'extérieur, de manière extrinsèque, à le regarder en objet. Le tore est présenté de la manière la plus simple par une étoffe en forme d'anneau comportant un trou d'un type très spécial. Ce trou fera l'objet de notre chapitre V.

La différence entre les deux narcissismes peut s'entendre alors comme passage de l'intrinsèque à l'extrinsèque. Dans le second, au lieu d'être simple sujet du corps, le sujet traite son corps en objet, à la façon dont il traite le corps d'un autre objet sexuel. C'est exactement la définition du narcissisme donnée par Freud dont la lecture est ainsi renouvelée.

Nous enseignons le passage du premier au second aspect du narcissisme avec ses conséquences de transfert dans le troisième schéma optique. Dans le second, au-delà de son interprétation grâce à un miroir, le sujet peut se situer comme relevant de la topologie extrinsèque d'une étoffe. Mais il ne peut s'en saisir véridiquement par le passage évanescent au travers de l'intrinsèque dans le troisième schéma optique. Le modèle optique du Docteur Lacan comporte déjà cette possibilité, en termes de miroir même.

Dans un cas, imaginaire, du miroir, le corps est projeté dans un autre lieu ; dans l'autre cas, symbolique, du langage de la topologie, le sujet existe d'un autre lieu à son corps.

Entre consistance et existence, il s'agira par l'intermédiaire de l'insistance des trous (pulsions) de situer le sujet dans le Symbolique — et c'est notre topologie. Dans ce jeu entre intrinsèque et extrinsèque, il pourra se saisir de sa structure en un redoublement, comme l'a merveilleusement monté, dans son théâtre, W. Shakespeare avec *Hamlet*. Il reste que ce passage dans le transfert est instantané, qu'il ne se stabilise pas mais qu'il se répète. Par conséquent le sujet doit y être passé plusieurs fois avant d'être capable d'en rendre compte.

Cette entrée est de fiction, à peine décollée, elle reste existante, c'est-à-dire qui "siste au-dehors" (S. XXII), mais on ne sait pas où. Dans l'exploration de ce pas-z-où, entre l'existence extrinsèque et les deux modes intrinsèques de la consistance et de l'insistance, la modification importe l'élimination (*fading*) du nœud qui se prête à un serrage par des coupures.

Congédiant le personnalisme et la personnalité, sans rapport avec la paranoïa puisque c'est la même chose, Lacan marque une rupture de ton dans ses écrits en 1958, lorsqu'il traite de façon définitive, pour en abandonner les termes, de la projection (imaginaire) qu'il nous apprend à distinguer de l'introjection (symbolique).

Après sa remarque sur le rapport de Daniel Lagache, en introduisant la signification du phallus, il va rompre avec ce qui précède dans la psychanalyse post-freudienne, avec ce qui va suivre dans la psychanalyse néo-lacanienne. Il repart de la castration, de sa structure de langage, il entreprend la mathématisation du désir (E. p. 683). Par un changement de style et de ton, la même année, dans *La Jeunesse de Gide* cette rupture est consommée. C'est l'année où nous faisons remonter l'introduction par Lacan du terme de jouissance dans le discours de l'analyse (voir p. 53).

Pour lui la découverte freudienne présente un renversement essentiel.

Le moi réputé instance d'unification se révèle changeant et principe de désunion.

Le désir, réputé toujours différent, lorsqu'on le confond avec les caprices liés à l'insatisfaction, devient avec Freud une insistance, inchangé, toujours le même.

Le désir structure les constructions que nous présentons dans notre topologie. Le désir c'est le mode d'articulation de l'ensemble de nos schémas. Il est principe de traduction dès l'entrée de la caverne, il gouverne jusqu'aux moindres détails de la superficie de sa paroi. Le désir est cette écharde qui insiste dans la chair, que la sagesse fait semblant d'ignorer. Elle la néglige et en recueille ainsi le châtement dans cet air triste qui la caractérise, "air d'esclave qu'elle garde à travers les temps" (E. p. 757). De ce transport clandestin "du fer qu'elle trimbale sous sa robe", elle n'obtiendra jamais la conviction du sujet.

Aujourd'hui la rigueur est de mise, non plus morale mais mathématique. A ne pas négliger cette instance, une éthique est de mise, à partir de laquelle nous faisons appel depuis le caniveau, lieu très étroit, et nous nous proposons de retourner à ces masques où "s'offre à nous le secret du désir et avec lui le secret de toute noblesse" (E. p. 757).

4. ... le cabinet des desseins

Dans cet écrit où Lacan traite du rapport de la lettre et du désir, à l'opposé de cette projection imaginaire, constituée par la construction du personnage gidien, il situe l'introjection symbolique, à l'occasion d'un lapsus fait à la lecture de Gide. A cette place laissée vacante par la destruction des lettres qu'il avait écrites à Madeleine, Gide avait écrit un vide (E. p. 762). Après avoir étudié les diverses présentations de l'étoffe, au cours desquelles nous affinons la définition de ce qu'est un trou, nous retrouverons la mobilité de celui-ci dans notre conclusion avant que de le nouer dans la suite de la série de nos fascicules de résultats.

a - *Traits*

Nous faisons un grand cas des invariants d'une surface topologique. Cette façon de faire, évidente pour un mathématicien versé dans la topologie, n'est pas immédiate à quiconque. Une grande part de l'étonnement produit par la topologie sur des lecteurs débutants, est une conséquence de l'absence de cette méthode chez ces derniers. Nous trouvons qu'il y a quelque abus à cantonner la méprise topologique à ce registre. Certes nous ne relevons plus les formes géométriques, cette notion n'est pas pertinente, et c'est le mérite de la topologie de nous défaire de la notion de forme. La reconnaissance d'un objet ne tient plus à la représentation, puisque avec les invariants nous l'isolons dans tous ses états, quelle que soit sa présentation. Cela est un premier point, le second consiste à dire que d'autres méprises persistent au-delà, toujours surprenantes. D'être approchées avec méthode, elles sont plus attrayantes, et deviennent enseignables.

Il faut remarquer que les invariants ont deux façons d'être abordés. Ils ont deux noms, selon qu'ils sont pris naïvement ou bien-définis par la théorie, c'est-à-dire construits.

Le degré d'encombrement correspond à la dimension topologique.

L'étoffe correspond à la surface topologique intrinsèque.

Le trou imaginable comme rupture de surface correspond au composant de bord d'une surface topologique dont nous traitons au chapitre II.

La face d'une étoffe correspond à l'orientation d'une surface topologique.

Le trou torique correspond aux générateurs de plusieurs groupes définis à propos d'une surface topologique dont nous traitons au chapitre V.

Ce double langage apparent ne correspond pas à une division simpliste. Ces termes sont l'effet d'une traduction, qui peut être dite réduction en mathématiques, mais qui dépendent d'une construction. Nous pouvons donner l'exemple de sa pratique dans l'écriture et la lecture du japonais (voir Présentation de la série, p. II) s'il était besoin de référence, et la traduction présente des nuances.

Nous connaissons le cas du croisement de deux brins de ficelle (dessus-dessous) qui donne lieu à une demi-torsion d'étoffe, pouvant être présentée comme un pli (voir chap. I, p. 62). Cette fois il s'agit de traductions à l'intérieur de registres topologiques propres.

Mais le pli effectif d'une étoffe peut être réduit différemment jusqu'à l'extrême où il ne correspond plus qu'au genre des surfaces non orientables intrinsèques (voir chap. VIII, p. 264).

Cette traduction n'est pas un manque de précision dans la méthode, et nécessite de bonnes constructions. Elle fait se saisir de la différence entre l'approche intuitive, c'est-à-dire naïve, et l'étude formalisée. Elle fait agir le trait.

a' - Dessins

Notre pari, de construire l'objet a, se gagne avec "de l'encre et du pinceau" (*Lituraterre*, p. 7). Pour son abord nous conseillons au lecteur de se pourvoir de papiers et de crayons et de ne pas oublier de s'essayer à quelques dessins. Quiconque n'a pas le don de dessiner selon son intuition, mais nous donnons dans cet ouvrage les principes de dessin auxquels nous nous plions.

Sans doute, ceux qui ont réalisé ce cours présentent quelques facilités lorsqu'il s'agit de dessiner. Mais selon notre propos cette intuition peut se réduire à des éléments simples et ordonnés, ceux-ci n'empêcheront pas les dessinateurs de talent d'y trouver aussi quelque intérêt dans un domaine limité.

Il reste remarquable que les dessins de nœuds, quoique rudimentaires, offrent plus de difficultés, et nous ne prétendons pas les avoir ici réduites autant que celles qui peuvent être rencontrées à l'occasion des étoffes.

En s'appuyant sur le dessin d'un nœud, il suffit de constater que nous traitons principalement de deux singularités de plongement des étoffes.

Premièrement : le pli, à l'occasion des croisements des nœuds de bord, pour les étoffes trouées (voir chap. I, p. 62).



Fig. 12

Deuxièmement : le trou torique, dans le cas d'étoffes non trouées, dont le tracé vient s'ajouter à un montage plié (voir chap. V, p. 161).

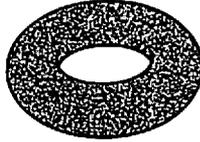


Fig. 13

Il reste une singularité de recouplement et de traversée des étoffes, dont nous avons pris soin de renvoyer l'étude en Appendice (voir Appendice, chap. I, p. 305) puisqu'il s'agit d'un autre mode de présentation extrinsèque appelé immersion par opposition au plongement.

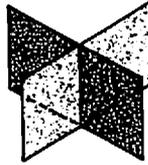


Fig. 14

Il faut lui adjoindre un protocole d'interprétation plus sophistiqué, alors que son tracé est plus simple au point d'être éludé dans les dessins de surfaces sans bord.

Cet ensemble réduit de traits donne lieu à une composition infinie et d'une richesse imaginaire sans limite, qui nous a conduit à déployer cet ouvrage de manière assez étoffée.

1918

...

...

...

...

...

LA PSYCHANALYSE AVEC LACAN



Chapitre premier

La jouissance et l'interdit du désir

Surfaces d'empan d'un nœud

TROU IMAGINABLE
NOMBRE DE FACES

1. De la jouissance

L'interdit est une autre figure dans le jeu du dit au dire. Pour nous cet interdit est structure, et c'est à expliquer cette structure que nous dessinons les traits de la question qui se pose au sujet. Le sujet est embarrassé de la présence d'un corps, le sien ou le corps d'un autre. Il ne sait que faire d'un corps, c'est la question de la jouissance, la question de l'usage du corps.

a - *Présentation scripturale*

L'apparition du terme de jouissance est attestée dans le discours analytique au cours de l'année 1958 par deux écrits de Lacan.

Dans le premier : *La signification du phallus*, propos tenu à Munich le 9 mai 1958 ¹, il est fait état de la jouissance masturbatoire de la phase phallique (E. p. 693) qui deviendra la jouissance phallique, J_Φ.

Dans le second : *La jeunesse de Gide ou la lettre et le désir*, paru en avril 1958 ², à propos de l'Idéal du moi de Freud, la jouissance d'un désir est évoquée pour définir cette instance comme se formant par l'adoption de l'image d'un Autre. Cet Idéal du moi se peint sur un masque dont la fonction va nous occuper au chapitre VII. Cela se produit "avec le refoulement d'un désir du sujet" dont l'Autre "a la jouissance avec les droits et les moyens" (E. p. 762). Nous y reconnaissons déjà ce qui deviendra dans le discours de la psychanalyse la jouissance de l'Autre, J_A.

Insistons sur la coordonnée juridique de la jouissance, que nous venons de rencontrer sous l'aspect des droits, car elle semble essentielle. Cette coordonnée nous offre l'occasion de lier l'Idéal

1. Nous ne disposons pas de la date de rédaction que nous tenons pour contemporaine puisque cet écrit n'a pas été publié avant la parution des *Ecrits*.

2. Dans le n° 131 de la revue *Critique*.

du moi avec la parenté. Nous retrouvons cette acception de la jouissance dans un écrit de Lacan daté de 1959, en hommage à Ernest Jones, où il définit la sexualité par le refoulement (E. p. 713).

De façon contraire aux analogies dont certains usent d'habitude, Lacan explique en quoi une technique, comme la culture de la terre, peut être dite métaphore du coït. C'est pour autant qu'une technique tombe sous le coup d'une interdiction, interdiction portée sur la jouissance de la terre dans cet exemple, interdiction qui se produit du fait des règles de l'alliance et de la parenté, dont voici située la fonction combinatoire, que la technique qui remplace la première devient symbolique d'une satisfaction sexuelle. La technique interdite du fait d'un blocage, d'un nœud, d'une impossibilité dans le réseau combinatoire en tant qu'il règle la jouissance des choses, est tombée sous le coup du refoulement.

La présentation du concept de jouissance en 1972, dans le séminaire *Encore*, reprenant et prolongeant le séminaire sur *L'Éthique*, insiste sur cette dimension juridique de la jouissance, la définissant par l'usufruit. C'est toujours en fonction des mêmes lois qui régissent le legs de l'usage, de quelques biens, de leur jouissance, ou de quelques titres confiés au sujet, à la condition de ne pas en abuser, qu'il lui faut les transmettre (S. XX). Les instances freudiennes se forment, dans le refoulement, des singularités et des accidents de ce réseau.

La jouissance est l'usage du corps dans ses coordonnées culturelles et juridiques, mais c'est aussi cette place "dont le défaut rendrait vain l'univers" quoiqu'elle fasse "languir l'Être lui-même". La jouissance répond à ce que je suis. Mais au lieu de me dire que je suis quelque meuble, elle désigne différemment un site : "Je suis à la place d'où se vocifère que "l'univers est un défaut dans la pureté du non-être"" (E. p. 819). Nous posons ces éléments, qui sont peu réjouissants, pour éclairer cette troisième coordonnée liée à la structure. Nous voyons maintenant d'où nous viennent ce concept et sa question, dans l'œuvre de Freud.

a' - Où la jouissance dans la construction freudienne

La question de la jouissance se pose dès les *Trois Essais sur la théorie de la sexualité*, lorsque Freud traite de la tension (*Spann*) sexuelle et du mécanisme du plaisir préliminaire. Le mécanisme de l'excitation sexuelle semble paradoxal voire contradictoire si nous tenons le plaisir pour une diminution de la tension, comme Freud le maintient avec fermeté à cet endroit précis de son texte ([1 e],

p. 114 ; [1 e'], p. 11). En effet nous ne comprenons pas comment peuvent être recherchées dans le même geste la diminution de la tension (plaisir) et la continuation, voire l'augmentation de celle-ci en vue d'un plaisir plus grand ([1 e], p. 115 ; [1 e'], p. 13).

"D'une part à cette stimulation est déjà liée du plaisir, d'autre part elle a pour conséquence une élévation de l'état d'excitation sexuelle ou une provocation de celle-ci là où elle fait encore défaut." ([1 e'], p. 13.)

et encore à peine plus loin :

"Cet attouchement provoque déjà un sentiment de plaisir mais simultanément est approprié comme nul autre à éveiller l'excitation sexuelle qui réclame un plus de plaisir." ([1 e'], p. 15.)

et encore :

"Alors l'effet est le même, d'une part sensation de plaisir qui se renforce bientôt par le plaisir provenant des modifications préparatoires, d'autre part nouvelle élévation de la tension sexuelle qui passe bientôt au déplaisir le plus évident s'il ne lui est pas permis d'occasionner un autre plaisir." (*Id.*)

Ce "problème dont la solution serait aussi difficile qu'importante pour la conception des processus sexuels" ([1 e], p. 114 ; [1 e'], p. 9), nous le lisons comme étant celui de la structure de l'involution signifiante.

"Comment il se fait que le plaisir ressenti provoque le besoin d'un plaisir plus grand, c'est justement le problème." ([1 e'], p. 15; [1 e], p. 116)

C'est le problème du plus-de-jouir que nous avons vu poindre, comme le remarquent les traducteurs que nous citons, sous la plume de Freud lorsqu'il parle de ce "plus-de-plaisir".

Il ne s'agit pas de savoir si ce principe doit être dit du plaisir, du déplaisir ou du plaisir-déplaisir. Ce ne serait alors qu'une querelle de mots qui ne rendrait pas compte du paradoxe de la jouissance.

Dans un paragraphe ajouté en 1920 à son troisième essai sur la théorie de la sexualité, Freud complète son argumentation par sa théorie de la libido. Le paradoxe de la jouissance, l'énigme de la

sexualité humaine devient la différence et l'identité de deux libidos qu'il note comme libido du moi et libido de l'objet sexuel. Nous retrouvons bien la question principale de structure que nous disons, dans notre Présentation, être le moment de Freud.

Pour nous ce paradoxe est structure : structure du langage, celle du signifiant, la castration, ici paradoxe de la jouissance. Il ne peut être traité que par une métaphore, ce que Lacan appelle la fonction imaginaire du phallus, pour dire qu'au moment où il se découvre ce n'est pas une simple mystification qui fait que seul un voile peut être jeté sur lui, il est éliidé. Cette structure de l'interdit c'est la structure de la pudeur où le démon de l'*Eidos* (démon de la pudeur) saute sur la scène à l'instant du dévoilement du phallus (E. pp. 555 et 692).

Pour être construite en logique, cette structure nécessite une topologie. Elle se réalise grâce à un opérateur d'intérieur, c'est la fonction de l'Autre qui modifie la logique classique avant de s'éliider pour ouvrir au champ des fictions. L'Autre est barré de son éliision³ et montre en quoi le faux ne cesse pas de ne pas s'écrire, mais existe comme les nombres imaginaires existent aux nombres réels. Ainsi nous dirons cette structure : interdit porté sur l'Autre aussi bien. Cette structure est manquée de l'Autre et de sa jouissance, ce dont il faut rendre compte.

Elle est structure topologique dont nous développons les reliefs au travers de variétés topologiques : les graphes, les surfaces, les nœuds. Elle est le moment de l'expérience sans lequel nulle conséquence symptomatique (phobie) ou structurale (*Penisneid*) ne prend effet (E. p. 693).

"Bien sûr c'est de la loi introduite par le père dans cette séquence que dépend son avenir" (E. p. 694). La loi, la combinatoire du signifiant, porte avec elle les traits de cette structure. Son intervention se situe dans les schémas de Lacan entre I et A, caractérisant les perception-signes de Freud, par opposition aux perceptions pures, brutes, de la physiologie qui ne connaissent pas cette découpe séquentielle. Mais l'Imaginaire dépend du Symbolique, la violence elle-même repose sur un pacte. C'est donc d'un défaut de cette structure que dépend la résurgence de la révolte, d'un défaut dans l'articulation de cette structure le retour maniaque de la tristesse. Ce retour est mortel (*Télévision*, p. 39).

a" - *Présentation structurale*

A ne pas perdre le tracé des schémas dans ces surfaces, nous pouvons lire et montrer dans notre Conclusion en quoi l'involution

3. *Nons*, fascicule n° 0.

signifiante rend compte de la façon dont se noue ce qui est premier avec le secondaire. Cela éclaire la composition du surmoi avec l'Idéal du moi de Freud, et des perception-signes avec le préconscient, et en quoi la jouissance peut être entendue comme j'ouis sens, trognon de la parole, lambeau de discours qui fait la voix de la conscience. Le paradoxe de la jouissance, dont l'âme est de faux, comme nous l'avons dit plus haut, a pour effet la nécessité de la culpabilité dans la névrose. Elle se maintient tant que l'angoisse qui sépare la satisfaction du désir n'est pas purifiée. Cette purification est écriture.

Il faut le temps pour bien écrire le paradoxe, toujours le même qui se formule encore ailleurs à propos du père en cette autre figure :

"... non seulement le meurtre du père n'ouvre pas la voie vers la jouissance que la présence de celui-ci était censée interdire, mais il en renforce l'interdiction." (S. VII, p. 207)

Le père est seulement censé médiatiser l'interdit de la jouissance. A son propos nous pouvons déjà distinguer la rivalité imaginaire, d'une part, de la loi dont il assume l'autorité, accompagnée de l'éliision qui lui est corrélatrice d'autre part. La notion de meurtre les confond. C'est en cela que nous devons écrire l'équation qui compose l'Imaginaire avec le Symbolique.

"Tout est là, et c'est bien là dans le fait comme dans l'explication la faille." (S. VII, p. 207)

Cette équation est fantasme dont nous ne prétendons pas sortir, mais à en rendre compte grâce aux mathématiques, nous faisons mathème logique de cette impossibilité même, de cette faille.

Cette solution logique à ne plus être engluée dans l'Imaginaire nous confirme que :

"L'obstacle étant exterminé sous la forme du meurtre, la jouissance n'en reste pas moins interdite, et bien plus, cette interdiction est renforcée." (S. VII, p. 207)

Mais du même coup, elle nous livre le profil de cette difficulté et sa dissolution.

La structure va au corps ou à la pensée. Ainsi du fait de cet interdit, des sucs qui le constituent — ce sont l'Autre, l'inversion et le voile — la jouissance se répartit nécessairement comme jouissance phallique et comme jouissance de l'Autre. Ces deux

jouissances ne sont pas respectivement substance étendue (le corps chez l'hystérique) et substance pensée (l'âme dans la névrose obsessionnelle). Elles induisent à une autre substance, substance jouissance (l'objet de la phobie), place tournante dans la symptomatologie des névroses. Certains masques déplient cette substance comme elle peut s'étendre en un territoire, extension de la libido lorsqu'il y règne le langage, à partir donc et distincte de l'éthologie.

L'interdit porté à la jouissance conduit nécessairement à l'échec d'une première jouissance, disons la phallique. C'est la façon dont la métaphore réussit en échouant, elle fait entendre ce qu'elle ne dit pas, et implique la quête d'autre chose, disons la jouissance de l'Autre, effet du ravissement. La satisfaction, toujours déçue chez le sujet, le conduit à suspecter une autre jouissance à atteindre. Mais en rester là est insuffisant, c'est une acception faible de l'interdit à laquelle reste attaché celui qui n'a pas fait l'épreuve de la structure en bonne logique. Cette autre jouissance, si elle existait, ce ne serait pas celle-là, celle qu'il faudrait, c'est celle qu'il ne faudrait pas (S. XX, pp. 54-57). Cela rend absolue et résout la déception de façon redoublée.

Mais au lieu de nous contenter de paraphraser la présentation élégante qu'en a donnée Lacan, c'est à écrire de manière axiomatisable la logique du profil de cette chute, à modifier l'algèbre de Boole et la raison de Kant que cette construction nous montre en quoi elle comporte un achèvement. Nous traduisons en mathématiques cette impossibilité même⁴. C'est à ne pas renoncer à écrire cette structure que nous démontrons, par la réalisation de son échec lui-même, ce en quoi elle ne s'écrit pas. Cette structure de la jouissance est celle du langage selon laquelle il n'y a pas de métalangage, à condition de construire cette nouvelle négation et d'en respecter la temporalité.

Le voile homologue la trivialisait de cette autre logique, il nous permet l'étude des traits structuraux qui conditionnent cette banalisation. Nous sommes conduits à raisonner sur des énoncés faux et des ensembles vides. Cela peut paraître une faute logique, car le faux, pour le monde académique, est réputé fautif. Cette faute détourne le sujet dans ses raisonnements, et par un renversement il s'attribue la faute, il en devient coupable. Car le sujet raisonne bien dans le faux et il est faux qu'il ne sache pas, de manière textuelle, que bien qu'il n'ait et n'aura jamais accès dans les deux sexes qu'à cette jouissance phallique (masturbatoire ou coïtale), sa jouissance dépend d'une autre, celle qu'il n'aura pas car elle ne saurait être. Mais il est faux qu'il sache qu'il ne peut et qu'il n'ose en faire état, dans son articulation logique, tant est

4. *Nons*, fascicule n° 0.

grande l'intimidation de peur d'être fautif, parce que coupable d'une faute logique.

Alors il est faux qu'il ne sache pas aussi et du même coup qu'à se résigner à la jouissance phallique il rend un mauvais service à l'organe pénien, eu égard à cette autre jouissance, et qu'il commet alors une faute de goût.

Nous comprenons ainsi que Freud émette des réserves dans la discussion relative à l'onanisme, tant à l'égard des thèses libérales qu'à l'égard des positions répressives.

Car le problème n'est pas là puisqu'il est bien, en ce domaine, celui de l'existence d'une autre logique.

A l'extrême du second chapitre de l'enseignement de Lacan, l'involution signifiante nous forme à cette dialectique, ce sont nos exercices d'échanges entre surfaces bilatères et surfaces unilatères. La topologie du sujet s'y projette et cette étape intermédiaire ne donne encore qu'une faible idée de la raison de son échec (*La méprise du sujet... ; Raison d'un échec*). En revanche elle offre déjà les moyens nécessaires à l'investigation dans l'espace du nœud. La retombée du voile phallique rend plus difficile ce tour suivant, comme l'explique le Docteur Lacan lorsqu'il en entreprend la nouvelle épreuve (*A la lecture du 17 décembre*, p. 98). Au cours de cette épreuve, il tente à partir de l'insistance du Réel comme trou (impossible) de serrer son existence. L'insistance du trou passe alors dans le Symbolique.

Le phallicisme est garanti à qui s'engluie encore dans la théorie des surfaces topologiques intrinsèques, car il suppose une autre théorie inatteignable. Cela nous incite à passer à cette dernière étape parce qu'il est faux qu'elle soit différente de celle qui précède et pour autant il est faux que ce soit la même. Portés seulement plus loin par la structure, nous ne supposons pas, dans la multiplicité des nœuds, autre chose que le lieu d'un serrage plus précis de cette autre substance qu'il n'y a pas, qualifiée de la phobie entre étoffe et coupure. C'est à cette substance qu'est accroché le sujet de la narcose (le drogué, on l'appelle) du pharmacien ou des dealers, des diodes et du fer à souder. C'est elle que transforment en cette chose psy (psychose) les irresponsables qui jouent du chômage pour intimider et asservir l'employé, en bourse pour dépouiller le petit porteur. Le drame lié à la structure se noue du fait que n'est pas moins sot de vouloir prendre leur défense et supprimer toute tension, alors qu'il est question d'apprendre à la pratiquer.

Avec nos surfaces d'empan (*spanning surfaces*), nous reprenons la démonstration selon laquelle il n'y a pas de jouissance de l'Autre. Telle peut être la situation de la psychanalyse en 1986 pour ceux qui nous supportent.

Cette quête n'est pas infinie, elle n'est pas idéal, elle est simplicité puisque le nœud cerne la dernière étape de l'enseignement de Lacan, à partir de laquelle se produit un bouleversement topologique qui en efface l'histoire.

2. De l'essaim à l'étoffe

a₁ - Construction des surfaces d'empan

Présentons ici un usage assez surprenant du calcul du groupe fondamental d'un nœud, tel que nous l'effectuons dans les champs d'ex-sistence du nœud⁵. Il nous conduit à une plus grande simplicité par la suite, à des calculs plus réduits, encore plus purs. Le groupe fondamental d'un nœud, dans notre présentation, nous offre un homologue discret et en algèbre du théorème de Stokes. Le Docteur Lacan rapporte la dérive freudienne (*Trieb*) à ce théorème du calcul différentiel et intégral (E. p. 847). Le corps est impliqué dans cette dérive par l'intermédiaire de trou s'appuyant sur un bord. Le sujet peut éprouver que cette dérive, à chaque tentative de traduction, produit une tension qui se maintient jusqu'à ce qu'il trouve le mot juste. Le Docteur Lacan soutient cette transposition de deux traits de structure. Le premier veut que la pulsion, comme le calcul du flux dans ce théorème, se produise dans une zone appuyée sur un bord. Le second étant que leur effet dans la zone se résume au calcul le long du bord. Nous sommes bien là, comme le disait Freud, dans le registre le plus mythologique du discours analytique, pour ne pas dire au niveau des pulsions. Pour nous cette référence trouve sa raison dans le travail de traduction, au lieu d'un quelconque modèle physique. Notre version lie ce théorème au commentaire donné par le Docteur Lacan dans son Séminaire XI (leçon du 13 mai 1964), où se trouve la plus pure présentation du circuit de la pulsion en un trajet parcourant l'espace environnant d'un bord. Calculer dans l'essaim signifiant, n'est-ce pas vivre la pulsion dans une pratique de traduction ? Pour avancer dans ce champ, il faut bien lire que cette traduction joue sur deux registres qui doivent se traverser pour se résoudre. Cette épreuve devient plus pure pour le sujet d'y être passé plusieurs fois. Elle livre le mot.

A cette fin, dans notre apprentissage, il s'agit d'obtenir, par un quotient du groupe, c'est-à-dire une simplification des calculs⁶, un coloriage des zones qui définit exactement une surface dont le nœud considéré est le seul bord. Où nous voyons que la tension

5. *Essaim*.

6. *Essaim*, pp. 48 et 124.

(*Spann*) dépend du nœud de bord, et où nous pouvons poser, à de nouveaux frais avec cette étoffe, la question de la consistance, celle du paradoxe de la jouissance, la structure tensionnelle du langage, et sa résolution par une coupure pertinente et interprétative. C'est du lieu de cette coupure que la tension trouve à s'établir, à partir d'elle que la construction semble du ressort de l'analysant.

Nous appelons surface d'empan (*spanning surface*), cette étoffe déduite de nos calculs, comme nous le montrons maintenant. Il s'agit d'une coupe transverse dans le champ d'existence du nœud, qui est déjà une projection de la structure dans l'historicité. Par la suite, cette précipitation nous servira à nous orienter dans le ruissellement du nœud consécutif à sa rupture.

Prenons des exemples simples. Le calcul dans le cas du nœud borroméen nous donne, à partir de trois générateurs, le marquage des zones suivant.

$$\begin{aligned} a &= xyx^{-1}zx \\ a &= yzy^{-1}xy \\ a &= zxz^{-1}yz \end{aligned}$$



Fig. 1

(Cet exemple est traité explicitement dans notre fascicule de résultats n° 1, pp. 101-104.)

Les trois expressions de la zone notée *a* correspondent bien à la définition du groupe de ce nœud, puisque nous savons par ailleurs qu'il est construit comme un groupe libre à trois générateurs et deux relations.

Ces deux relations sont : $xyx^{-1}zx = yzy^{-1}xy = zxz^{-1}yz$.

En quotientant⁷, c'est-à-dire en ajoutant certaines relations, nous obtenons les marquages qui définissent une surface dont le bord est le nœud borroméen, comme le cachemire est la marque, lointaine, de rivages anciens.

$$\begin{aligned} x &= y = z \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$



Fig. 2

7. *Essaim*, pp. 48 et 124.

Pour les relations supplémentaires $x = y = z$ et $x^2 = 1$, nous obtenons la surface qui correspond au coloriage des zones notées x . Cette surface d'empan est unilatère, c'est pourquoi nous colorions comme un morceau d'étoffe monochrome.



Fig. 3

Lorsque les surfaces d'empan sont bilatères, et nous traiterons plus loin du nombre de faces (voir p. 65), elles sont connues en mathématiques sous la dénomination de surfaces de Seifert (du nom du mathématicien H. Seifert).

a_2 - Demi-torsions et plis

Formulons la définition d'un type de trait, rencontré dans nos dessins, le plus important après le trait de bord. Il s'agit du trait de pli.

Aux croisements du nœud⁸ correspondent des demi-torsions de ruban (de surface d'empan). Nous pouvons par nos calculs faire apparaître des plis à la place des demi-torsions.

Définition d'un pli :



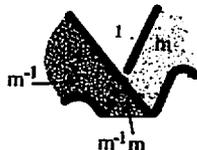
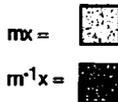
Un croisement marqué...



Le marquage est un coloriage du pli...



... auquel nous ajoutons une ligne de perspective, dite ligne de pli.



... dont nous modifions le bord de manière continue, de façon à accentuer sa présentation de pli.

Fig. 4

8. *Essaim*, pp. 81-85.

A un croisement⁹, lorsque le quotient du groupe donne la valeur 1 à deux zones attenantes par le sommet, zones adjacentes au croisement, nous pouvons ajouter un trait en travers qui barre une zone neutre (valeur 1) et remplacer 1 par $m^{-1}m$ (composé de l'inverse d'un mot, m^{-1} , et de ce mot, m). Alors le coloriage bicolore correspond bien à un pli de morceau d'étoffe bilatère, avec la convention selon laquelle nous assignons une couleur à chaque lettre et une zone porte alors la couleur de la première lettre du mot qui la nomme. (Le cas des étoffes unilatères ne fait pas problème ici car $m = m^{-1}$ simplement et les deux faces sont donc de la même couleur.) Nous notons mx un mot qui commence par l'expression m , et $m^{-1}x$ un mot qui commence par l'expression m^{-1} .

Remarquons que les lettres suivantes des mots en question donnent les différentes épaisseurs d'étoffes qui peuvent se sous-poser en chaque zone, avec leur ordre d'empilement.

La portion de bord recouverte, par la première nappe d'étoffe qui arrête le regard, est maintenant en pointillé. Dans le cas du pli que nous isolons :



Fig. 5

Donnons deux exemples.

Ces différentes conventions donnent rapidement un résultat dans le cas d'un ruban dont le bord est un enlacement.

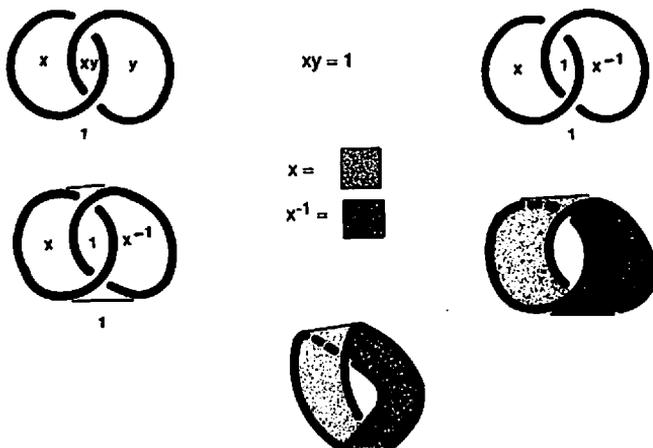


Fig. 6

9. *Essaim*, pp. 81 et 83.

Il s'agit d'un ruban d'étoffe, comme un morceau de jute, présentant deux plis de même sens.

Nous pouvons, selon ce principe, marquer les plis de la surface d'empan du nœud borroméen que nous avons esquissée plus haut (fig. 3).

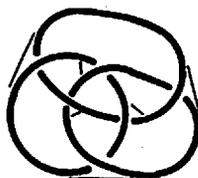


Fig. 7

Ce qui donne le coloriage suivant, $x =$ 

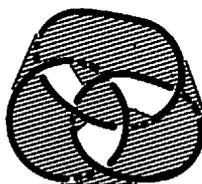


Fig. 8

Si nous accentuons la déformation du pli de manière continue, ce qui ne change rien ni au calcul ni au coloriage, nous obtenons cette surface :

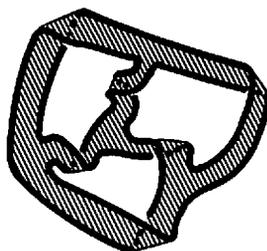


Fig. 9

En conclusion, nous dirons que *la surface d'empan sans les plis* de la figure 3 est correcte ; elle correspond à *la surface avec les plis* de la figure 9.

Nous obtenons par ces calculs et ces coloriages des présentations d'étoffes nouées. Nous sommes dans une topologie extrinsèque aux étoffes, comme nous l'expliquions dans l'Introduction (p. 38). Cela ne nous oblige pas d'oublier ce que l'on peut savoir de la topologie intrinsèque d'une étoffe. Au contraire c'est l'intrinsèque qui oublie l'extrinsèque, et non l'inverse. Ainsi la théorie, désormais classique, des surfaces topologiques intrinsèques, à laquelle cet ouvrage est voué, reste pour nous d'un usage certain (voir chap. II, p. 77). Les propriétés caractéristiques qu'elle reconnaît sont, pour certaines, déductibles de nos calculs, loin de la grossièreté du madapolam. Nous étudions maintenant de telles propriétés à l'occasion des surfaces d'empan des nœuds.

3. Propriétés intrinsèques caractéristiques d'une surface d'empan

a₁ - *Le nombre de faces*

Une étoffe est dite bilatère lorsque nous pouvons y distinguer deux faces (comme sur un disque).

Une étoffe est dite unilatère lorsqu'elle n'a qu'une seule face (comme la bande de Möbius).

Nous parlons de faces et écartons le terme de côté dans ce cas mais nous conservons comme d'un usage courant les termes de bilatère et d'unilatère pour parler des étoffes.

Le nombre de faces est une caractéristique extrinsèque de la surface d'empan, il n'est pas défini dans la topologie intrinsèque de l'étoffe (voir chap. III, p. 106). Dans la topologie intrinsèque, le nombre de faces a un invariant correspondant, il s'agit de l'orientabilité.

Ces deux notions sont corrélatives. Une orientation d'une étoffe est définie grâce à un repère plongé dans cette étoffe, c'est une caractéristique intrinsèque. Les faces sont définies par des normales (vecteurs perpendiculaires) à la surface. Cette caractéristique fait appel à l'espace ambiant, elle est extrinsèque. La corrélation entre ces deux manières d'exprimer une même caractéristique est remarquable, elle semble se jouer du problème de *dimension* qui est ici en cause.

Nous faisons, par deux quotients du groupe fondamental du nœud, apparaître cette caractéristique. Notre calcul est extrinsèque de fait¹⁰, il donne le nombre de faces.

10. *Essaim*, p. 60.

Nous prenons, pour exposer ce calcul, le nœud trèfle dans ses deux présentations duales l'une de l'autre¹¹.



Fig. 10

Première présentation

(0) *Le calcul de base.* Le calcul du groupe fondamental, pour la première présentation, nous donne, à partir de deux générateurs, le marquage des zones suivant¹²,



Fig. 11

avec la relation $xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1} = 1$.

(1) *Distinction des pleins et des vides.* Nous quotientons en ajoutant la relation $x = y$, pour déterminer l'indice de chacune des zones de la mise à plat¹³, et nous définissons comme vides les zones de degré pair, soit $x^2 = 1$, afin que la zone périphérique soit vide, pour plus de simplicité comme nous le signalons dans notre fascicule n° 1¹⁴. Nous obtenons une surface d'empan qui correspond au coloriage des zones d'indice impair, notées x du fait de notre quotient précédent ($x^2 = 1$).

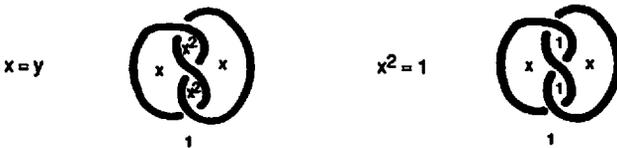


Fig. 12

(2) *Recherche du nombre de faces.* Nous reprenons les résultats du calcul à l'étape précédente (0), c'est-à-dire avant d'effectuer le quotient, pour déterminer le nombre de faces de l'étoffe.

Les deux zones vides centrales du nœud, notées x^2 sur la figure 12, sont notées xy et yx sur la figure 11. Ces zones sont vides

11. *Essaim*, pp. 105 et 118.

12. *Essaim*, p. 117.

13. *Essaim*, pp. 122-126.

14. *Essaim*, p. 90.

maintenant, l'expression de chacune d'elle est égale à 1. Ainsi, à partir d'un premier quotient du groupe fondamental déterminant une surface d'empan du nœud (opposition pleins/vides), nous obtenons les indications nécessaires pour former deux nouvelles relations : $xy = 1$ et $yx = 1$, correspondant à un nouveau quotient effectuable dans le cas des résultats de la figure 11.

Nous pouvons alors remplacer xy et yx par 1 dans les expressions du calcul du groupe fondamental du nœud. La relation du groupe $xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}y^{-1} = 1$ se réduit : $x(xy)^{-1}y(yx)^{-1} = xy = 1$, dont nous déduisons $y = x^{-1}$.

Chacune des zones pleines de la surface d'empan est désignée soit par x soit par l'inverse de x : par cette écriture nous distinguons les deux faces de la surface qui est donc bilatère.

En faisant correspondre une couleur à x , et une autre couleur à x^{-1} , nous obtenons un nouveau coloriage de la surface d'empan qui met en évidence la présence de deux faces distinctes. En effet, x est différent de x^{-1} ($x \neq x^{-1}$, équivaut à $x^2 \neq 1$). Le lecteur peut vérifier dans le calcul qui précède que l'égalité contraire, $x^2 = 1$, n'a pas été introduite dans l'étape (2), à partir du moment où nous sommes revenus au résultat donné dans la figure 11.

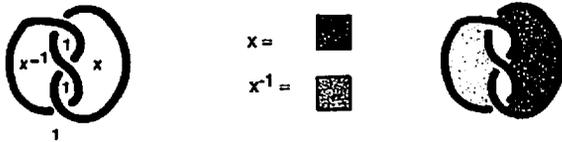


Fig. 13

Deuxième présentation

Définissons avec les mêmes techniques, la surface d'empan de la seconde présentation du nœud trèfle et décidons de son nombre de faces.

(0) *Le calcul de base.* Le calcul du groupe fondamental nous donne, à partir de deux générateurs, le marquage des zones suivant¹⁵,

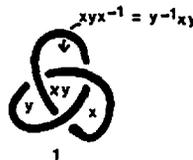


Fig. 14

15. *Essaim*, p. 105.

avec la relation $xyx^{-1} = y^{-1}xy$.

(1) *Distinction des pleins et des vides* : Nous quotientons en ajoutant la relation $x = y$, pour déterminer l'indice de chacune des zones, et nous définissons comme vides les zones de degré pair, soit $x^2 = 1$, afin qu'elles soient vides comme la zone extérieure. Nous obtenons une surface qui correspond au coloriage des zones d'indice impair, notées x du fait du quotient $x^2 = 1$.

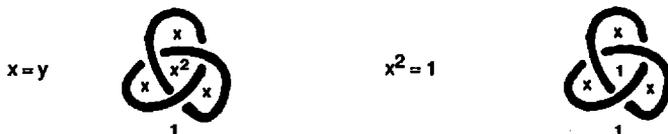


Fig. 15

Nous avons défini une surface d'empan du nœud trèfle, tissée comme la futaine. Pour déterminer son nombre de faces, nous reprenons le calcul au départ.

(2) *Recherche du nombre de faces*. La zone vide centrale du nœud, notée x^2 sur la figure 15, est notée xy sur la figure 14. Cette zone est vide maintenant, nous pouvons donc poser $xy = 1$ et remplacer xy par 1 dans toutes les expressions du calcul du groupe fondamental, il s'agit du nouveau quotient de ce groupe effectué dans le cas des résultats donnés par la figure 14.

La relation $xyx^{-1} = y^{-1}xy$ se réduit à $x^{-1} = y^{-1}$, soit $x = y$. Ce qui signifie que toutes les zones pleines de la surface d'empan peuvent être désignées par x : l'étoffe n'a qu'une seule face, elle est unilatère. En effet, dans ce cas, la relation $y = x$, expression simplifiée de la relation du groupe, conjointe à la relation $xy = 1$ du quotient adopté ici, donne $x^2 = 1$, signifiant que l'opération du groupe est involutive, et l'étoffe unilatère.

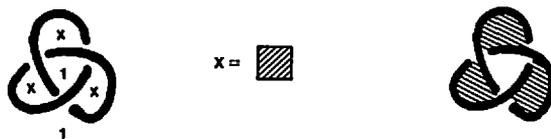


Fig. 16

Il est nécessaire de bien distinguer les différents calculs. D'abord celui du groupe fondamental du nœud (0) ; puis le quotient que nous effectuons en ajoutant des relations qui simplifient les expressions du groupe fondamental et dont nous obtenons une surface (opposition plein/vide, $x/1$) d'empan du nœud (1) ; enfin le report, dans les expressions des relations du

groupe fondamental (ici une seule relation), des relations résultant du premier quotient (c'est-à-dire celles qui s'écrivent à partir des expressions des zones vides, comme telles égales à 1). Nous obtenons, par ce second quotient en retour (2), une indication relative au nombre de faces de la surface d'empan : soit $y = x^{-1}$ qui correspond aux étoffes bilatères, soit $y = x$ qui correspond aux étoffes unilatères.

a₂ - Le nombre de bord

Le bord de la surface d'empan est composé d'un ensemble de cercles disjoints. Par cercle nous désignons toute courbe fermée qui est plongement du cercle trigonométrique de la géométrie analytique (le pont aux ânes classique $x^2 + y^2 = 1$). Déterminer le nombre de bord c'est compter le nombre de cercles composants du bord. Ce nombre de composants du bord, ou nombre de bord, est une caractéristique intrinsèque de la surface d'empan. Il prendra toute son importance au chapitre suivant lorsque nous traiterons de l'indicateur d'Euler-Poincaré et du genre des étoffes.

4. Réduction par le dessin d'une surface d'empan à ses caractéristiques intrinsèques

Trois opérations permettent de réduire une quelconque surface d'empan à la forme la plus simple qui lui est intrinsèquement équivalente (même nombre de faces et même nombre de bord). Une opération est extrinsèque (elle ne change pas le nœud du bord), deux sont intrinsèques (elles défont le nœud du bord). Il s'agit, par ces transformations topologiques, continues de l'une à l'autre, de conserver l'étoffe (l'intrinsèque) sans le nœud, le nouage de l'étoffe étant une caractéristique extrinsèque¹⁶.

Opération I : *Déformation des surfaces à bord*

La première opération consiste en un changement de la présentation de la surface d'empan de telle sorte qu'on puisse aisément effectuer les autres opérations. La déformation des surfaces à bord est une opération extrinsèque qui fait apparaître la

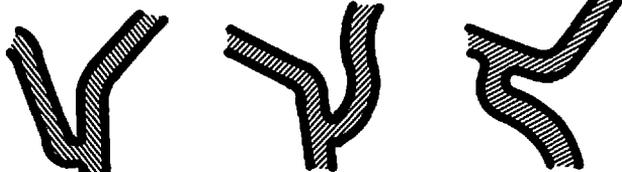
16. Si nous nommons une transformation intrinsèque f , et F une transformation extrinsèque de l'espace contenant la bande à deux demi-torsions vers l'espace contenant la bande sans demi-torsion, il faut dire que f n'est pas une restriction de F (voir Introduction p. 38-39).

surface d'empan considérée comme un ensemble de rubans (ou bretelles) d'indienne, avec ou sans pli et demi-torsion, qui peuvent se croiser entre eux et reliés les uns aux autres en un tout connexe. Il est alors possible de faire glisser un ruban le long d'un autre, c'est-à-dire de déplacer le carrefour qu'ils forment.

Deux cas peuvent se présenter : le ruban déplacé ne rencontre ni demi-torsion, ni pli sur le ruban qu'il longe...



Sans pli.



Il est notable qu'un même carrefour de rubans peut se lire de différentes manières pertinentes entre elles.

Fig. 17

... dans le cas contraire, il va se créer un pli sur le ruban déplacé au passage de la demi-torsion (ou du pli) du ruban qui est longé.

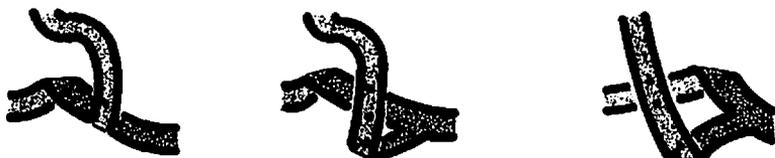


Avec un pli.

Demi-torsion.

Pli correspondant.

Fig. 18



Passage d'un pli.

Résultat du passage
d'une demi-torsion.



Fig. 19

La situation de départ de cette série de dessins peut donner lieu à un autre changement de présentation.



Fig. 20

Opération II : *Suppression des demi-torsions en nombre pair*

La seconde opération est intrinsèque à l'étoffe : sur un même ruban les demi-torsions consécutives en nombre pair peuvent être supprimées. Cette homotopie du bord défait le nœud (extrinsèque) mais conserve les caractéristiques intrinsèques.

Ainsi un ruban à un nombre pair de demi-torsions (un nombre entier de torsions) est intrinsèquement équivalent à un ruban sans demi-torsion, comme de la rouennerie les effets de relief :



Fig. 21

Un ruban à un nombre impair de demi-torsions est équivalent à un ruban à une seule demi-torsion.



Fig.22

Opération III : *Echange des dessus-dessous des rubans d'étoffe*

La troisième opération est, comme la précédente, intrinsèque. Au niveau d'un croisement de deux rubans, ceux-ci peuvent se

traverser l'un l'autre, comme le permet le nansouk, de telle sorte que celui qui était dessous passe dessus.



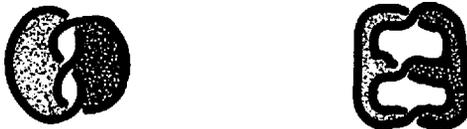
Fig. 23

Précisons que cette homotopie de rubans (ou de bandes) n'a de sens que pour des rubans appartenant à la même étoffe (ils sont connexes par leurs extrémités).

Ces trois opérations étant définies, nous donnons ci-dessous deux exemples de réduction d'une surface d'empan à ses caractéristiques intrinsèques.

Nous reprenons d'abord le nœud trèfle dans sa présentation bilatère dont nous connaissons les caractéristiques, puis le nœud borroméen dont nous connaissons la surface d'empan et dont nous pouvons connaître les caractéristiques par les calculs que nous pouvons effectuer comme précédemment pour les deux présentations du nœud trèfle.

Exemple du nœud trèfle dans sa présentation bilatère

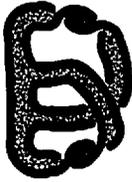


La surface d'empan est transformée en une présentation en rubans portant des demi-torsions.



Déplaçons l'attache de l'un de ces rubans...

en passant une demi-torsion, il se crée une demi-torsion.



Nous regroupons les demi-torsions qui sont appariées.



Nous supprimons d'après l'opération II les paires de demi-torsions.

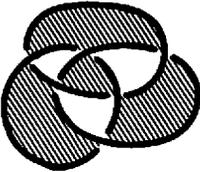


Nous obtenons ainsi un carrefour de bandes, c'est un tore troué.

Fig. 24

La surface d'empan intrinsèque du nœud trèfle dans sa présentation bilatère est un tore troué.

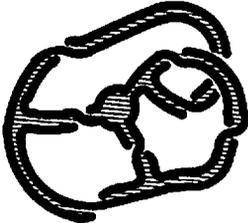
Exemple du nœud borroméen



La surface d'empan, sans les plis, du nœud borroméen.



Nous la présentons en un montage de carrefour de rubans.



Un premier glissement le long d'une autre demi-torsion selon l'opération I,



puis un second glissement. Dans ces deux cas il y a passage d'une demi-torsion.

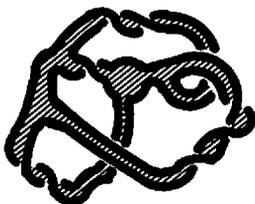
Fig. 25

Intermède :

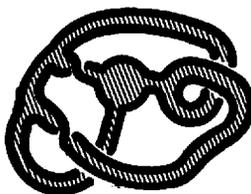


où nous rappelons qu'il se produit une nouvelle demi-torsion au passage d'une demi-torsion.

Fig. 26



Nous regroupons les demi-torsions qui se sont produites sur de mêmes rubans.



Nous supprimons les demi-torsions par paires, selon l'opération II (l'une d'entre elles qui reste est déplacée).

En déplaçant un ruban le long d'un autre, nous dégageons une boucle de ruban.

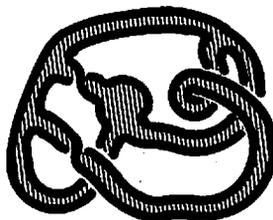


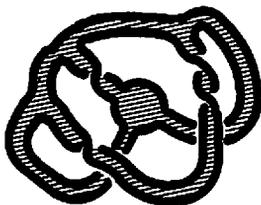
Fig. 27

Intermède :

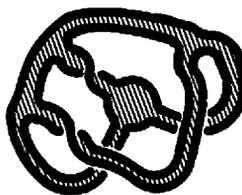


Fig. 28

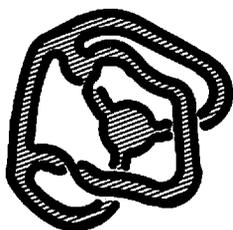
où nous montrons qu'une boucle de ruban équivaut à deux demi-torsions. Cela se voit à suivre les dispositions mutuelles des deux éléments de bord.



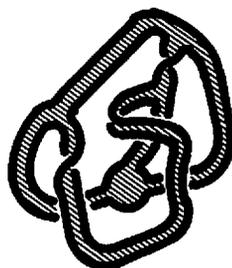
Deux demi-torsions donc, à la place de la boucle,



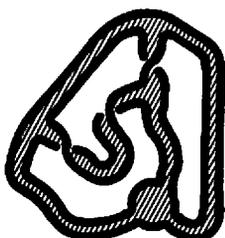
que nous pouvons supprimer, selon l'opération II.



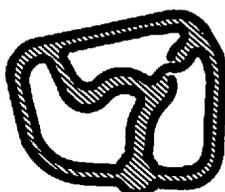
Nous déplaçons encore un ruban d'étoffe sans rencontrer de demi-torsion.



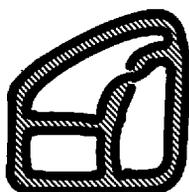
Puis nous passons une demi-torsion. Il se produit une nouvelle demi-torsion,



Réduisons le parcours du ruban d'étoffe qui porte deux demi-torsions.



Supprimons ces deux demi-torsions inverses l'une de l'autre.



Il reste une seule demi-torsion. Nous déplaçons de l'autre côté de la figure un ruban d'étoffe sans demi-torsion.



Cela donne cette disposition régulière, qui équivaut à

un diagramme fait d'une bande de Mœbius avec deux trous.



Fig. 29

C'est la structure intrinsèque de la surface d'empan du nœud borroméen.

Les caractéristiques intrinsèques de la surface d'empan d'un nœud sont donc les traces, la mémoire du fait qu'il y avait un nœud. Dans l'étoffe le nœud s'oublie, comme effacé par l'éponge, il en reste quelques traces insuffisantes à le reconstituer ; en effet plusieurs nœuds différents peuvent avoir une surface d'empan intrinsèque présentant les mêmes invariants. Il reste avec cette étoffe un calcul dans le genre du nœud.

Nous montrerons par la suite comment les coupures dans les surfaces d'empan peuvent devenir un nouvel invariant du nœud. Ces coupures cernent des vides.

Dans ce chapitre nous avons vu les calculs dans les champs d'ex-sistence de ces nœuds être remplacés par des coloriages de hachures , d'un grisé clair  et d'un autre plus foncé , qui s'y substituent avec exactitude. Ils traduisent la projection de la grammaire de la pulsion dans la logique du fantasme. Dans la suite de cet ouvrage nous éviterons de recourir au calcul algébrique pour ne faire usage que des coloriages correspondants.

Chapitre II

L'étoffe du classicisme et la surface pour Lacan

Théorie des surfaces topologiques intrinsèques

NOMBRE DE BORD
SHÉMAS P.Q.R.

1. Définitions

a₁ - *Les surfaces topologiques*

Une surface topologique est un montage de morceaux d'étoffe. Pour relever de cette théorie, le montage doit être effectué selon deux principes à respecter rigoureusement.

Une surface topologique se présente comme un costume d'Arlequin, un patchwork de morceaux irréguliers mais dont les caractéristiques ne sont pas indifférentes.



Fig. 1

Les morceaux d'étoffe sont extensibles et rétractiles à volonté, selon les besoins du montage. En topologie, la mesure n'importe pas, ni pour la surface ni pour les morceaux qui la constituent. Ces éléments de surface sont des *polygones qui peuvent être posés sur le plan* (c'est-à-dire localement équivalents à \mathbb{R}^2) ou sur la sphère ce qui est la même chose (voir chap. IV, p. 148). Ces lambeaux d'étoffes sont des *disques topologiques* dont le périmètre est pourvu de points. Ceux-ci découpent le périmètre en segments, ces points sont leurs extrémités. Il y a au moins un point : le plus petit disque topologique (morceau d'étoffe ou pastille sphérique) est le disque dont le périmètre est découpé en un seul segment par un point.



Fig. 2

Chaque montage de surface réalisé selon les principes que nous énonçons maintenant s'appelle un pavage dans le cas où les morceaux d'étoffe sont des polygones quelconques. S'il est fait de morceaux qui sont exclusivement des triangles, nous parlerons d'une triangulation. Dans tous les cas les morceaux d'étoffe sont les faces du pavage, les segments cousus ses arêtes et les points d'extrémités identifiés ses sommets. Nous employons aussi de manière usuelle le terme de face pour désigner l'envers et l'endroit d'un morceau d'étoffe. Nous discuterons plus loin de cette difficulté de vocabulaire. Qu'une face de pavage ait deux faces est une considération dont nous faisons grand cas par la suite, et nous expliciterons ce paradigme au chapitre III.

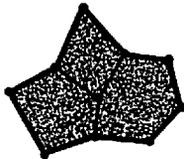
Deux principes de montage, précis et impératifs, de ces morceaux d'étoffe définissent les surfaces topologiques.

Premier principe : Deux morceaux sont cousus ensemble le long d'un segment propre à chacun qui devient arête, commune frontière entre eux deux (une telle frontière n'appartient pas au bord de la surface, elle s'intègre au graphe d'un pavage consistant dans l'étoffe).



Fig. 3

Second principe : Pas plus de deux morceaux d'étoffe sont cousus le long d'une même arête (nous avons rejeté en Appendice les constructions présentant plus de deux morceaux d'étoffe cousus le long d'une même arête).



La construction admise.



La construction non admise.

Fig. 4

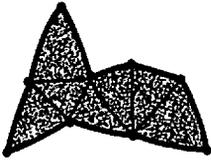
Cela définit toutes les surfaces topologiques qui peuvent être étudiées selon cette théorie désormais classique. On sait en énumérer tous les cas et en reconnaître les cas semblables : c'est la classification des surfaces topologiques *intrinsèques*.

Cette définition des surfaces topologiques intrinsèques à partir de leur montage implique en contrecoup et donne la raison de l'homologie des trajets à la surface de nos étoffes.

Nos étoffes sont des surfaces topologiques intrinsèques ; c'est un cas de traduction et de définition très simple.

a₂ - Définition du bord d'une surface topologique

• *Le bord* d'une surface topologique est la réunion des segments des morceaux d'étoffe qui n'ont pas servi au montage par couture.



Montage à un composant de bord.



Bande ou ruban, montage à deux composants de bord.

Fig. 5

Cette réunion de segments montés bout à bout donne toujours lieu à une réunion de cercles disjoints. Ce peut être un cercle ou plusieurs cercles. Dans tous les cas, nous parlerons du *bord* de la surface pour parler de cette réunion ; des *composants* de ce bord pour parler de chaque cercle distinct; et nous dirons le *nombre de bord* (comme on parle du prix du pain) pour le nombre des composants du bord.

Nous pouvons définir alors les trous les plus imaginables qui font ainsi rupture dans la surface. Chaque trou imaginable comme rupture de surface est défini par un cercle composant du bord d'une surface topologique. C'est l'occasion de rencontrer la réduction d'un invariant intuitif, le trou imaginable, à un invariant bien construit, le composant de bord. A proprement parler, il n'y a pas de trou imaginable dans la surface intrinsèque ; seul son bord y insiste et le trou existe pour nous. Cela ne définit qu'un type de trou parmi ceux que nous distinguons, et montre la nécessité de distinguer différents types de trous parmi les trous.

• Il se peut que toutes les segments aient été cousus au montage, auquel cas *le bord* a été *annulé* : il existe donc des surfaces sans bord.



Fig. 6

On distingue ainsi deux types de surfaces : les *surfaces sans bord* pour lesquelles tous les segments des morceaux d'étoffe ont servi au montage ; et les *surfaces à bord* pour lesquelles certains segments de morceaux d'étoffe n'ont pas été cousus. Soulignons encore une fois que la réunion de ces segments constitue un ou plusieurs cercles. Ce fait remarquable, qui risque de faire évidence, mérite d'être médité (voir fig. 5).

La distinction entre surfaces à bord et surfaces sans bord étant posée, on peut établir une correspondance entre elles.

a₃ - Première proposition importante

Proposition. A toute surface topologique (avec ou sans bord) correspond une surface sans bord :

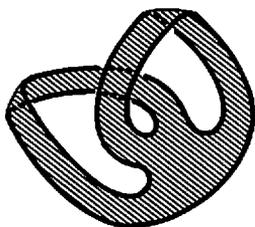
a) si la surface est sans bord, la surface sans bord correspondante est cette surface elle-même.

a') si la surface a un bord, le bord de cette surface S est une réunion de cercles disjoints. Nous pouvons construire une surface sans bord (fermée) S' associée à S en *fermant* les trous imaginables comme rupture de surface, ces trous sont délimités par chacun des cercles composant le bord. La fermeture des trous est obtenue grâce à des disques cousus le long de chaque cercle composant le bord de la surface S .

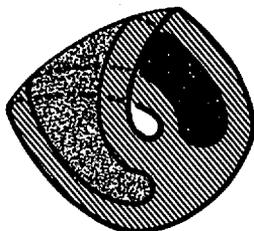
Nous disons que le trou imaginable existe pour nous comme un invariant intuitif, c'est une notion très faible de l'existence puisqu'il est substantifié par le disque qui vient le fermer, ce dont notre première proposition nous assure.

Ce type de trou n'en reste pas moins que les autres différent du vide dans sa façon d'être. Le vide ne saurait être confondu avec un trou si nous le définissons par l'ensemble vide. Le trou est plus ou moins substantifiable, comme nous le verrons par la suite, alors que le vide en théorie des ensembles est de l'ordre d'une essence. La distinction entre substance et essence, comme nous l'interrogeons dans notre jeu de traduction, correspond au départ à la différence entre la définition en extension et la définition en

intension d'un ensemble. Revenons à la substantification du trou imaginable.



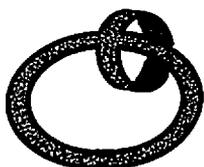
Deux trous.



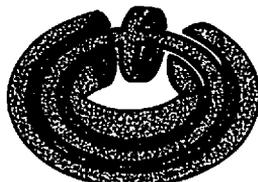
Un trou fermé, reste un trou.

Fig. 7

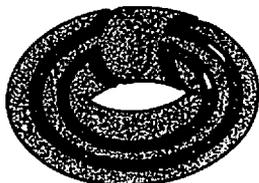
Dans le dessin de droite, un disque déformé ferme un trou de la surface du dessin de gauche.



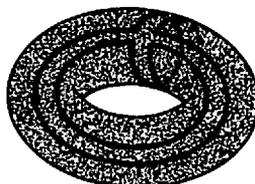
Cette surface présente un seul trou.



Un disque présenté comme un rectangle déformé...



...vient fermer le trou...



...pour constituer un tore sans trou.

Présentation du disque déformé qui vient fermer le trou.

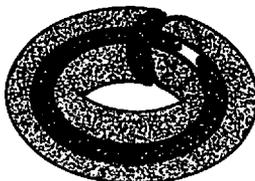


Fig. 8

Cette proposition facilite la théorie des surfaces parce qu'elle permet de s'en tenir à une théorie des surfaces sans bord.

Certaines surfaces exigent d'être plongées dans un espace de dimension quatre pour être fermées ; c'est-à-dire pour que soit

effectivement réalisable, selon nos principes de montage, la surface sans bord qui leur correspond. Ces surfaces qui font exception sont des surfaces non orientables ; nous les définissons plus loin.

En utilisant notre première proposition principale à rebours, nous pouvons passer par l'étape d'une théorie des surfaces à un seul composant de bord (un seul trou) en faisant correspondre à chaque surface sans bord une surface présentant un seul trou. Cette théorie est intermédiaire entre la théorie des surfaces sans bord et la théorie des surfaces dont le bord a plusieurs composants. Nous appuyant sur cette correspondance avec les surfaces topologiques sans bord, nous traitons de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques quelconques en ne présentant par le dessin que des surfaces plongeables ayant au moins un composant de bord. Cette stratégie ne doit pas faire oublier l'existence de surfaces fermées (sans bord) irréalisables dans un espace de dimension trois.

a4 - Invariants intrinsèques

Les invariants¹ intrinsèques permettent aux mathématiciens de reconnaître les surfaces topologiques dans leur identité, et de les distinguer lorsqu'elles sont dissemblables. Pour nous, ces invariants mathématiques offrent un intérêt encore plus grand, puisqu'ils donnent lieu à des définitions réduites et bien construites qui traduisent des traits remarquables dès l'abord, dans les objets souples. Ces traits présentent parfois la difficulté d'être la condensation de plusieurs invariants. Nous discutons dans cet ouvrage de plusieurs cas de figures, afin de pouvoir maintenir le parler intuitif sans perdre de la rigueur, et pratiquer la traduction dans les deux sens.

Cette pratique est courante dans la langue selon que l'on traduit un signe linguistique dans d'autres signes de la même langue, dans une autre langue ou dans un système de symboles non linguistiques. A un moment d'aliénation extrême, il arrive que certains bloquent cette pratique en tentant l'usage d'une langue de bois, et il est amusant qu'il nous soit reproché à la fois de prêter à cet appauvrissement de la traduction et d'en développer la pratique intensive. Il ne s'agit pas pour nous de "réclamer la suppression d'expressions aussi trompeuses que le lever ou le coucher du soleil"; car nous sommes de l'avis de Roman Jakobson en continuant à employer cette imagerie ptolémaïque "sans que cela implique le rejet de la doctrine copernicienne, et il nous est aisé de passer de nos conversations courantes sur le soleil levant ou couchant à la représentation de la rotation de la terre" ([25],

1. *Essaim*, Appendice, p. 149.

p. 81). Cet auteur donne la raison de cet exercice, qui est homologue pour nous à la structure du langage selon laquelle il n'y pas de métalangage. Il dit tout simplement, comme Freud l'a souligné, que "tout signe peut se traduire en un autre signe" et que cette traduction structure le langage sans jamais nous faire sortir du langage.

Nous avons énuméré, à la fin de l'Introduction, les cas de telles traductions rencontrés à propos des surfaces. Donnons ici les noms mieux construits en théorie des ensembles de ces invariants de surfaces.

Il y a d'abord la possibilité d'être orientées ou non, qui correspond au nombre de faces, ce terme est justement équivoque puisqu'il sert aussi en mathématiques à désigner les faces d'un pavage. Nous le maintenons pourtant dans le cas des surfaces bilatères ou unilatères.

Il y a encore le nombre de bord, le genre, l'indicateur d'Euler-Poincaré, le groupe fondamental, le groupe d'homologie qui étayent et mettent de l'ordre dans la définition du trou.

Certains de ces invariants, comme le genre, ne peuvent être définis pour une surface topologique quelconque que par l'intermédiaire de ce même invariant défini pour la surface topologique sans bord correspondante.

Ces caractéristiques sont dites invariants parce que ce sont des propriétés qui ne varient pas au cours des transformations continues de la topologie.

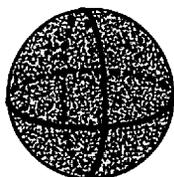
Nous donnons la définition de ces invariants au chapitre III, avec un commentaire pour chacun d'eux, après avoir indiqué la portée du recours à ces invariants dans l'articulation du Symbolique et de l'Imaginaire.

2. Eléments de base de la classification des surfaces et leur mode de composition

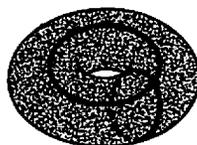
a₁ - Théories

.Première version: Théorie des surfaces sans bord

On retient quatre éléments de base dont une surface quelconque est composée. Ces éléments sont les quatre surfaces sans bord suivantes : la sphère, le tore, l'espace projectif et la bouteille de Klein.



La sphère.

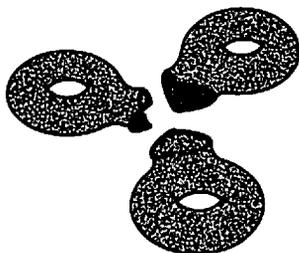


Le tore.

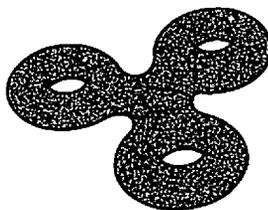
Fig. 9

Pour le plan projectif et la bouteille de Klein, que nous ne représentons pas ici, voir Appendice (p. 303).

Pour composer les surfaces sans bord à partir des quatre éléments sans bord cités, on fait un trou sur chaque élément (ce qui crée un bord pour chacun d'eux) et on les recolle entre eux suivant ces bords, ce qui referme les trous.



Trois tores troués.



Le triple tore.

Fig. 10

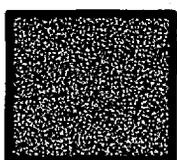
Deuxième version : Théorie des surfaces à bord présentant un seul cercle composant (trouées une seule fois)

1. Articulation de la théorie précédente avec celle qui vient maintenant.

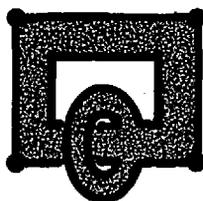
Sur chacune des quatre surfaces sans bord du paragraphe précédent nous pratiquons un trou (un bord fait d'un seul composant). La sphère munie d'un trou est un disque. Le tore muni d'un trou est dit tore troué, que nous présentons en un carrefour de bandes. Le plan projectif troué est la bande de Mœbius. La bouteille de Klein trouée est la 2-bande de Mœbius. Ces deux dernières équivalences seront établies dans l'Appendice (p. 315) à travers diverses représentations du plan projectif, d'une part, et de la bouteille de Klein, d'autre part.

2. *Les éléments de base de cette théorie et leur mode de composition.*

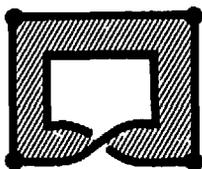
Nous pouvons décomposer une quelconque surface ayant au moins un bord réduit à un seul composant en un montage de plusieurs éléments, choisis parmi les quatre suivants : le disque, le tore troué, la bande de Mœbius et la 2-bande de Mœbius.



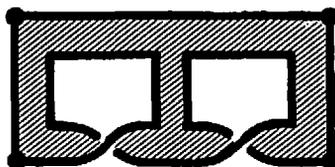
Le disque = la sphère trouée.



Le tore troué.



La bande de Mœbius = le plan projectif troué.



La 2-bande de Mœbius = la bouteille de Klein trouée.

Fig. 11

Pour composer entre elles les surfaces à bord, on coud les éléments avec bord que nous venons de citer le long de segments de leur bord respectif selon nos deux principes de montage.



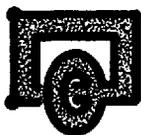
Deux tores troués.



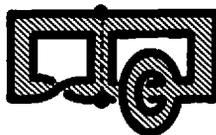
Le double tore troué.



Une bande de Mœbius.



Un tore troué.



Une bande de Mœbius et un tore avec un trou.

Fig. 12

.Troisième version: Théorie des surfaces quelconques à bord (trouées)

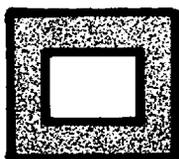
1. *Articulation* de la théorie précédente avec celle qui suit maintenant.

Les surfaces quelconques ayant plus d'un composant de bord sont obtenues à partir des surfaces à bord ayant un seul composant.

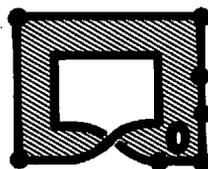
Pour la raison qu'à une surface *quelconque* correspond une surface *sans bord*, d'après notre proposition principale. Nous en avons déduit en l'utilisant à rebours qu'à une surface *sans bord* correspond une surface à *un seul composant* de bord. Celle-ci correspond donc à une infinité de surfaces à bord, ces surfaces sont les mêmes que celles auxquelles correspond la surface sans bord qui lui est associée.

Les composants de bord supplémentaires sont autant de trous imaginables différents. Nous pouvons faire autant de trous imaginables comme rupture de surface que nous voulons, c'est-à-dire retirer un nombre quelconque de pastilles (disques = sphères trouées).

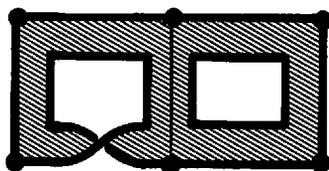
Au lieu de dire que nous pratiquons des trous supplémentaires dans les surfaces à un bord présentant un seul composant, nous dirons que nous apportons des éléments supplémentaires, chacun de ces éléments étant équivalent à un disque troué (sphère à deux trous = bande à deux faces).



Le disque troué.



La bande de Möbius trouée.



La bande de Möbius et un disque troué.

Fig. 13

A la sphère (surface fermée), nous faisons correspondre le disque troué qui a deux cercles-composants de bord. Car, inversement, la sphère est équivalente à un disque troué dont on a fermé les deux trous.

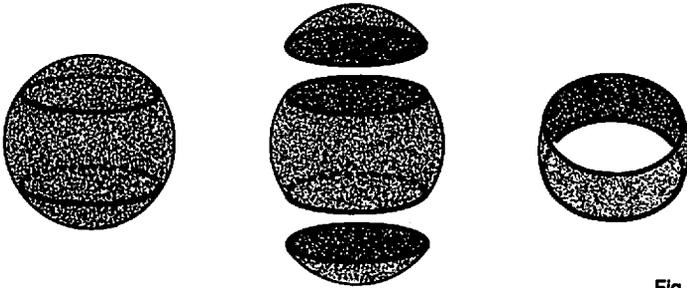
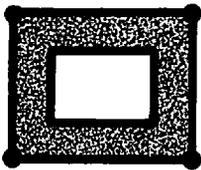


Fig. 14

Ainsi obtenons-nous une meilleure formulation de la théorie des surfaces topologiques à bord quelconques, où nous retrouvons la présentation de Griffiths [3].

2. *Les éléments de base* de cette théorie et leur mode de composition.

Nous pouvons décomposer une quelconque surface ayant au moins un bord, à l'exception du disque (sphère trouée), en un montage d'éléments, choisis parmi les quatre suivants : le disque troué, le tore troué, la bande de Mœbius et la 2-bande de Mœbius.



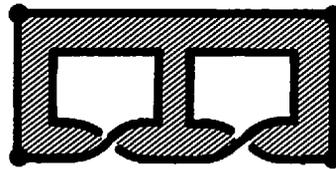
Le disque troué.



Le tore troué.



La bande de Mœbius.



La 2-bande de Mœbius.

Fig. 15

Nous composons ces éléments de base comme ceux du paragraphe précédent, en respectant nos deux principes de montage.

Un composé de deux bandes de Möbius équivaut à une bouteille de Klein trouée, et la bouteille de Klein équivaut à un composé de deux plans projectifs. On pourrait se contenter de trois éléments de base, puisque l'un des quatre est déjà un composé. Le théorème principal qui suit donnera la raison de ce choix de quatre éléments.

a₂ - Composition développée des éléments de base

Nous pouvons utiliser plusieurs éléments semblables (par exemple deux tores pour faire un double tore).



Deux tores troués.

Le double tore = le 2-tore.

Fig. 16

Tous les éléments de base ne sont pas nécessairement utilisés.

Enumérons quelques résultats. Pour les surfaces sans bord :

- Un composé de deux sphères donne une sphère ;
- Un composé de n sphères donne une sphère ;
- Un composé de deux tores donne un double tore (dit aussi 2-tore, voir ci-dessus) ;
- Un composé de n tores donne un n -tore ;
- Un composé de deux plans projectifs donne une bouteille de Klein ;
- Un composé de trois plans projectifs donne, à première vue, un plan projectif plus une bouteille de Klein ; mais donne aussi lieu à la seconde proposition importante de cette théorie.

a₃ - Seconde proposition importante

a - Théorème principal

- Pour les surfaces sans bord :
- Trois plans projectifs composés donnent un plan projectif plus un tore.

- Pour les surfaces à bord :
 - Trois bandes de Mœbius composées donnent une bande de Mœbius plus un tore troué.



Fig. 17

Il ne faut pas conclure de ce théorème que deux plans projectifs composés entre eux sont équivalents à un tore. Deux plans projectifs ne sont équivalents à un tore qu'en présence d'un troisième plan projectif. Il doit toujours rester, au moins, un plan projectif lorsque nous remplaçons le composé de deux plans projectifs par un tore. Il peut donc arriver qu'il reste deux plans projectifs composés entre eux. Dans ce cas, nous ne pouvons les assimiler à un tore. Nous montrons maintenant par le dessin la pertinence de ces résultats dans le cas des surfaces à bord.

Ajoutons l'énoncé réciproque suivant : La composition d'un plan projectif et d'un tore donne un 3-plan projectif.

Puis, formulons le théorème plus général qui se déduit de notre théorème principal.

a' - Théorème général

Un nombre impair $(2n+1)$ de plans projectifs équivaut à 1 plan projectif plus n tores ;

Un nombre pair $(2n)$ de plans projectifs équivaut à un 2-plan projectif plus $(n-1)$ tores.

a'' - Monstration du théorème général

Nous montrons par l'intermédiaire de dix dessins l'équivalence intrinsèque des deux présentations de la figure 17.

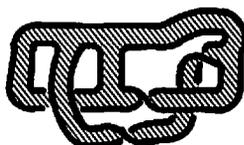


A partir du premier dessin de la fig. 17 présentant trois bandes de Mœbius,

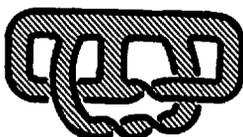
nous déplaçons l'attache d'une bretelle de la surface ; elle passe une demi-torsion, il s'en produit une nouvelle.



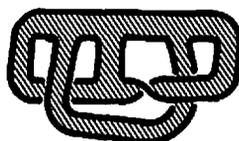
Nous supprimons la paire de demi-torsions qui se succèdent directement du fait de cette première transformation.



Prolongeons cette transformation. La même bretelle est accrochée maintenant au-delà d'une autre demi-torsion, ce qui provoque une nouvelle demi-torsion sur la bretelle.



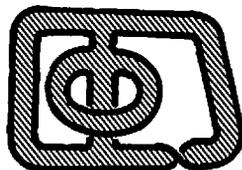
Maintenant, il y a 2 demi-torsions sur cette bretelle qui participe de notre surface selon un autre accrochage.



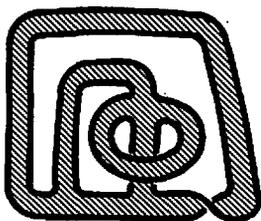
Nous supprimons cette paire de demi-torsions, puisque nous ne considérons cette équivalence que de manière intrinsèque.



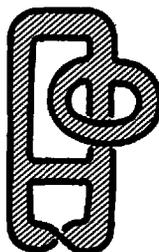
Ici une transformation d'immersion de la surface fait passer la bretelle au-dessus d'une autre bretelle,



afin de réduire encore le mode d'attache de cette première bretelle.



Nous déplaçons maintenant le branchement de la bretelle tordue, celle qui porte la dernière demi-torsion de cette surface.



Nous échangeons la zone extérieure en faisant passer la bretelle tordue par dessus la figure. Cette transformation ne crée pas de nouvelle demi-torsion.

Fig. 18

3. Présentations

a₁ - *La grande sphère de Soury*

Une surface topologique *sans bord* est une sphère sur laquelle sont accrochés 0, 1 ou 2 plans projectifs et une multiplicité de tores, ou aucun.

On peut ajouter à une telle surface autant de trous qu'on veut pour obtenir une surface à bord.

Une surface topologique *quelconque* est une grande sphère munie de zéro, un ou deux plans projectifs (voir théorème général), d'une multiplicité de tores, éventuellement nulle, et d'une multiplicité de trous, ou d'aucun.

On peut donc indexer une surface topologique par trois nombres:

- p : nombre de plans projectifs, p égale 0, 1 ou 2.
- q : nombre de tores, q est un entier positif.
- s : nombre de trous, s est un entier positif.

Une surface topologique *à bord* est une grande sphère trouée (un trou) munie de 0, 1 ou 2 plans projectifs, d'une multiplicité de tores, éventuellement nulle, et d'une multiplicité de trous *supplémentaires* ou aucun. Une surface topologique *à bord* sera indexée par trois nombres, p, q, r, ce dernier étant le nombre de trous s'ajoutant à celui de la sphère trouée de départ, il est donc inférieur d'une unité au nombre s de trous d'une surface *quelconque* ($r = s - 1$).

a₂ - *Les schémas de Griffiths*

En suivant Griffiths — auquel il faut se reporter pour les démonstrations des résultats précédents — nous donnons une présentation de la théorie des surfaces topologiques à bord (le disque, équivalant à la sphère trouée, étant mis à part).

À l'exception du disque, qui semble remplir le rôle d'un élément neutre pour la composition des surfaces, nous associons à une quelconque surface topologique un triplet de nombre (p, q, r) comme nous venons de le dire au paragraphe précédent, et un schéma P.Q.R. 2.

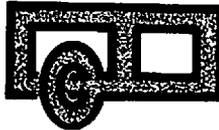
2. Griffiths adopte une correspondance entre les lettres p, q et r et les surfaces de genres différents qui se distingue de la nôtre à une permutation circulaire près.



(0, 0, 2)
2 disques troués = sphère à 3 trous.



(0, 2, 0)
2 tores troués = 1 double tore
troué (le 2-tore troué).



(0, 1, 1)
1 tore troué + 1 disque troué = 1 tore à 2 trous.

Fig. 19

Le disque troué correspond au nombre r , il sert à compter le nombre de trous en supplément du trou nécessaire à notre présentation des surfaces par le dessin des plongements de ces surfaces.

Le nombre de parties toriques apparaît comme autant de tores troués, il correspond au nombre q .

a₃ - Divers compléments à notre présentation de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques

Ces compléments constituent l'aspect de la théorie qui intéresse la plupart des ouvrages de mathématiques traitant des surfaces topologiques. Ces ramifications recèlent, chacune à sa façon, le trait de structure que nous voulons souligner mais ne cherchent qu'à utiliser ses résultats en vue de traiter divers problèmes généraux plus classiques. De ce fait, nous pouvons dire méconnu le trait de structure en question.

• Les identifications de polygones sphériques

Il existe une autre présentation des surfaces topologiques intrinsèques, désormais classique en France chez les mathématiciens du fait de son adoption par le professeur H. Cartan.

La théorie des surfaces topologiques peut être présentée à partir de l'identification des segments du bord de polygones plans pourvus d'une orientation appropriée.



La sphère.



Le tore.



Le plan projectif.



La bouteille de Klein.
Fig. 20

Nous retrouverons dans les chapitres suivants cette présentation des surfaces topologiques intrinsèques et nous montrerons, grâce à notre lecture extrinsèque, son équivalence avec notre présentation en termes de surfaces ayant au moins un trou.

• La théorie de Morse

La théorie des surfaces topologiques comprend encore la théorie de Morse dont nous ne traitons pas. Il est à noter qu'elle séduit les amateurs idéalistes, amoureux de la géométrie différentielle, par son aspect qui la rapproche de la mécanique classique et sa plus grande finesse apparente. Mais nous lui préférons nos exercices structuraux à propos de traits invariants que nous n'essayons pas de rapporter à un unique domaine standard qu'il soit numérique ou algébrique³.

• Les métamorphoses de pavages de surfaces

De façon plus récente, C. Léger et J.-C. Terrasson ont ajouté un chapitre important à la théorie des surfaces topologiques [9]. A la suite de Coxeter, ils ont écrit le jeu réduit des métamorphoses de pavages de surfaces, achevant ainsi l'intuition de ce grand mathématicien. Leur résultat peut être dessiné en extension, moyennant des trous, dans notre présentation de la théorie des surfaces grâce à notre lecture extrinsèque de la dimension, comme nous le montrons à partir du chapitre IV à propos des trous imaginables.

a4 - Avantages de notre présentation

Chaque surface ayant *au moins un trou* a l'avantage, pour notre présentation par le dessin, d'être plongeable dans \mathbb{R}^3 .

On peut donc en donner une présentation sans singularité (présentation de la chose même) qui la situe dans la théorie classique des surfaces topologiques. Le fait de privilégier les

3. *Essaim*, p. 149.

surfaces ayant *au moins un composant de bord* permet donc de présenter par un dessin (shéma de Griffiths) chaque surface considérée de manière exacte. Ce shéma se substitue à un triplet de nombres (p, q, r) , mais nous pouvons lire ce triplet dans le shéma, et cette présentation peut être plus aisée pour un lecteur qui débute à qui fait défaut l'intuition de ce dont il s'agit.

-Le cas des surfaces sans bord non orientables, dans ces conditions

Certes, ces surfaces ayant *au moins un trou* ne couvrent pas l'ensemble des surfaces que nous pouvons réaliser, selon nos principes de montage, dans un espace de dimension quelconque.

Pour atteindre toutes les surfaces (variétés de dimension deux) de cette théorie il n'est pas nécessaire d'aller au-delà de la dimension quatre. Cette propriété montre déjà l'importance de la notion de codimension. Cette notion extrinsèque est la différence (soustraction) entre le nombre de dimension d'une variété et celui de l'espace dans lequel elle est plongée.

Certaines constructions ne se ferment, pour donner une surface sans bord en respectant les principes de cette théorie, que dans l'espace de dimension quatre.

Il s'agit des surfaces non orientables, celles qui comportent au moins une bande de Möbius.

En général, on donne des présentations de ces cas particuliers en les immergeant dans l'espace de dimension trois, c'est-à-dire en provoquant des singularités (d'immersion) qui contreviennent à notre deuxième principe de montage. Ces singularités d'immersion sont des lignes de points multiples (voir Appendice, p. 304).

En revanche, nous pouvons obtenir un correspondant en dimension trois de toute surface, réalisable avec nos morceaux d'étoffe, selon nos deux principes, dans un espace de dimension quelconque. *Il suffit d'y pratiquer un trou* en utilisant notre première remarque principale à rebours. C'est-à-dire qu'à chaque surface sans bord correspond une surface trouée ayant donc un composant de bord. Nous pouvons la plonger en dimension trois moyennant un trou que nous acceptons de reconnaître comme une singularité, mais qui ne laisse pas croire qu'il s'agit exactement de l'objet en question puisqu'il y a passage d'une surface sans bord à une surface présentant un bord. Personne ne peut admettre alors qu'il s'agisse de la même chose, à moins d'être confus.

Cette présentation montre la différence qu'on doit faire entre rigueur et exactitude. Pour être rigoureux, nous devons dire qu'il est de la structure de surface sans bord qui nécessite la codimension deux, que les singularités d'immersion (ligne de points multiples) ou de plongement (au moins un trou) éludent

cette nécessité en faisant croire qu'il est possible de présenter les surfaces en codimension un.

Dans le cas des singularités d'immersion, la singularité prête à penser que la codimension deux n'est pas nécessaire afin de présenter les surfaces sans bord. Nous avons le témoignage de ce que beaucoup d'amateurs prennent le cross-cap ou le modèle de la bouteille de Klein pour le plan projectif ou le 2-plan projectif. Ce qui leur fait du tort car ils confondent une *représentation* avec la chose même. Ils font ainsi l'impasse sur la structure de cette chose au profit de la représentation. Cette structure exige, pour être identifiée, hors d'en croire saisir l'objet — du regard, de la main — sous la forme d'un modèle, d'y pratiquer quelques actions effectives, comme des permutations, des trajets, des coloriages (voir Appendice, p. 303).

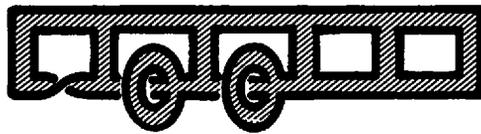
Dans le cas des singularités de plongement, préférées ici, nous ne prétendons pas traiter en codimension un des surfaces sans bord, nous respectons par-là cette nécessité de la codimension deux pour les surfaces sans bord. Par le moyen du trou imaginable comme rupture de surface, nous éliminons les singularités d'immersion qui contredisent la définition des surfaces de notre présentation au sein de laquelle nous restons, sans prétendre à l'exhaustivité. Nous procédons ainsi car cette présentation est grosse d'une formulation de la théorie des surfaces qui souligne le trait de structure dont nous voulons rendre compte. Pour atteindre l'ensemble du domaine couvert par la théorie des surfaces topologiques, nous sommes ainsi amenés à préciser ce que nous faisons grâce aux plongements de surfaces à bord.

Il peut paraître paradoxal que nous choissions une présentation qui donne des représentations exactes alors que d'autre part nous insistions sur les conditions nécessaires à la définition d'une catégorie d'objets. Le paradoxe se résout lorsque nous disons qu'il faut choisir entre ces deux points de vue et n'en méconnaître aucun.

4. Conclusion

Nous associons à chaque surface à bord un schéma de Griffiths, dit P.Q.R., qui correspond, à partir de nos quatre éléments de base, au triplet (p, q, s) de nombres reconnu par Soury, étant entendu que $r = s - 1$.

Donnons quelques exemples.



$$p = 1, q = 2, r = 2.$$



$$p = 2, q = 1, r = 1.$$

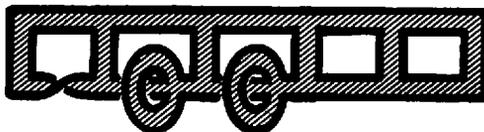
Fig. 21

Comme nous le remarquons au début de ce chapitre, il n'y a en fait que trois éléments de base — c'est pourquoi il s'agit d'un triplet dans cette notation. Mais il reste une différence entre nombre pair et nombre impair de plans projectifs, d'après ce qui se déduit du théorème général. Ainsi se comprend que nous parlions de quatre éléments de base.

Il ne faut pas oublier que, d'après le théorème général de cette théorie, le cas $p = 3, q = 1, r = 2$ devient $p = 1, q = 2, r = 2$,



$$p = 3, q = 1, r = 2.$$



$$p = 1, q = 2, r = 2.$$

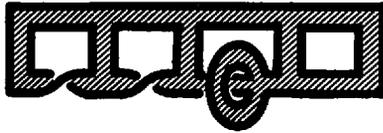
Fig. 22

Car p peut toujours être réduit à 1 ou 2, puisque nous pouvons retirer des bandes de Möbius par paires (ici une paire) et les remplacer par autant de tores troués que de paires de bandes de Möbius enlevées (ici un tore troué, soit une partie torique trouée).

Le cas $p = 4, q = 0, r = 1$ devient, d'après le théorème général, $p = 2, q = 1, r = 1$.



(4, 0, 1)



(2, 1, 1)

Fig. 23

La théorie des surfaces topologiques étant ainsi exposée dans ses grandes lignes, nous revenons à la présentation des invariants qui permettent de reconnaître une même surface au travers de présentations (montages) différentes, et de distinguer les surfaces qui ne sont pas identiques.

Par la suite, nous poursuivrons en retrouvant une préoccupation ancienne et essentielle à cette théorie, un peu négligée du fait de son achèvement. Il s'agit de la question des coupures que l'on peut pratiquer dans ces surfaces. Comme le montrent les invariants, les trajets pratiqués à la surface de ces montages de morceaux d'étoffe produisent des séparations (non connexité) caractéristiques de la structure de ces surfaces. Cela permet de suivre le Docteur Lacan dans ses jeux de dimensions, lorsqu'il dit la surface être coupure (*Radiophonie*, p. 70 ; *L'Etourdit*, p. 27).

Les chapitres suivants traiteront, dans chaque cas élémentaire, des différentes présentations possibles de ces montages d'étoffes, et des coupures (surfaces) que nous pouvons y effectuer.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This not only helps in tracking expenses but also ensures compliance with tax regulations. The second part of the document provides a detailed breakdown of the company's financial performance over the last quarter. It includes a comparison of actual results against budgeted figures, highlighting areas of both strength and weakness. The final section outlines the company's strategic goals for the upcoming year, focusing on increasing operational efficiency and expanding market reach. It also mentions the need for continuous monitoring and reporting to ensure these goals are met.

Chapitre III

La naissance du jeu Invariants

DEMI-TORSION ET
NOMBRE DE BORD
LES AUTRES INVARIANTS

Les invariants sont à première vue ce que l'ancienne géométrie appelait propriétés caractéristiques. Ils sont les indicateurs ou les traits caractéristiques qui se conservent au travers des transformations topologiques et permettent donc, dans des circonstances diverses et mêmes surprenantes, d'identifier et de distinguer les objets indépendamment des apparences. Ils ont donc en premier lieu une fonction comparable à celle, bien connue en chimie élémentaire, des indicateurs colorés.

Nous donnons dès l'abord un exemple d'une telle analyse structurale à l'occasion d'un problème apparemment élémentaire, mais les invariants ont pour nous une fonction supplémentaire.

A leur propos, la notion de chiffre d'identification, attaché aux êtres topologiques étudiés, est trompeuse car aucune nécessité n'exige qu'ils soient numériques. Au terme de chiffrage, nous préférons celui de traduction ou de transposition (*Umsetzung*). Déjà, en géométrie euclidienne, la mesure est un invariant. Son caractère numérique ne doit pas faire illusion mais fait encore difficulté. Elle masque qu'il s'agit de rapporter les objets à d'autres objets : ici, les objets géométriques à des nombres. Que ces derniers soient pris dans un espace aussi standard, nous importe moins. La première originalité de la topologie algébrique reste de nous inviter à faire correspondre à des objets topologiques des objets algébriques, par exemple des groupes.

Pour nous, l'intérêt de cette procédure ne réside pas dans la transposition intégrale et biunivoque d'une catégorie d'objets, dont le maniement est inhabituel, dans une autre catégorie d'objets mieux connue. Nous préférons à ce point de vue une diversité de traductions locales, pratiquées en divers sens. Cette pratique permet de nouer plusieurs registres par la traduction et nous aboutissons, au lieu d'une unification totalisante, à un achèvement qui rend raison. Il consiste à en recueillir la formule par le serrage d'un trou ainsi cerné. Contrairement à l'idée selon laquelle l'imagination déborde la conceptualisation, nous assistons en topologie à un débordement de l'imagination par la structure beaucoup plus riche.

A partir d'invariants intuitifs auxquels quiconque semble recourir, abordant le champ des objets topologiques, la

mathématique opère une réduction. Cette réduction confirme les invariants intuitifs en ce qu'ils voulaient dire et les nettoie de confusion. Elle établit la cohérence de deux champs différents mais chacun consistant. Nous reprenons toujours l'exemple de l'écriture japonaise à ce propos. Que dire de son travail, si le chinois archaïque, auquel elle se réfère, n'avait été une langue constituée ? Mais sa vertu reste dans la double lecture, comme ici, pour nous, en psychanalyse avec la topologie.

La difficulté de la topologie devient sensible lorsqu'on sait que ces invariants, pour le mathématicien, en mathématiques, doivent être constructibles dans le langage de la théorie des ensembles depuis un siècle. Ces invariants sont, en mathématiques, des ensembles construits à partir de la définition ensembliste des variétés étudiées préservées par les transformations. Ils conduisent à une théorie de l'objet et nous savons que cette procédure ne va pas sans produire quelques effets intratextuels dus à la traduction. Cette question fait l'objet de l'Appendice de notre fascicule de résultats n° 1.

Nous n'établirons pas ici la séquence de construction de ces invariants jusqu'à les réduire à de pures fictions ensemblistes, pour la raison que nous les présenterons dans un jeu de bonnes abréviations¹ suffisamment bien construites. Cette pratique peut être prolongée plus finement pour des mathématiciens auxquels nous devons l'écriture sous-jacente à nos constructions.

Nous ne pensons pas que les moyens mnémotechniques, auxquels on recourt dans l'usage, soient de simples trucs. D'autre part, dans l'exercice d'un pas de danse, la décomposition, nécessaire à l'apprentissage, s'efface au profit du style.

En troisième lieu, ces invariants dépendent non seulement de l'entité étudiée mais aussi des transformations qui définissent l'espace dans lequel elle est mise à l'épreuve. L'influence du contexte sur ces combinaisons de lettres que sont les invariants est de loin la fonction la plus importante afin de situer les fictions freudiennes comme le sont les entités mathématiques, et afin d'indiquer le registre de matérialité de la dynamique de la structure.

Ce qui précède amorce l'explication du fait que la pratique de la psychanalyse détermine sa clinique. Posons qu'il n'y a pas de clinique sans une éthique et que celle-ci est de bien dire dans l'analyse. Nous commençons à montrer alors en quoi la clinique dépend de la pratique, celle-ci étant traduction et conséquence de la doctrine que l'on se fait de l'analyse à partir de Freud. Il s'en déduit que ce n'est pas parce que le fétiche est l'invariant de la perversion et l'objet d'une phobie l'invariant de la névrose qu'ils peuvent servir aux indices à identifier des personnes, puisqu'il

1. *Nons*, fascicule de résultats n° 0, Appendice.

s'agit déjà de sujets divisés dans la structure. Et le terme fameux de psychotique, dont l'emploi s'est répandu chez certains pour désigner leur Autre, n'a pas pour invariant qu'on se tienne mal à table. La forclusion est un défaut dans la pratique de traduction des objets et des invariants entre eux figés comme dans une holophrase.

L'exercice qui vient maintenant nous montre l'usage d'un trait caractéristique qui se substitue à ce que nous constatons de l'apparence. Cet exercice inaugure la discussion de ce nouvel invariant intuitif qu'est la demi-torsion d'étoffe. Nous la prolongerons jusqu'à la fin du chapitre VIII. Cet exemple montre la différence entre l'emploi néfaste de la notion de forme et, par opposition, l'avantage de notre recours à l'esquisse d'un langage de catégories accompagné d'invariants.

1. Les demi-torsions apparentes des bretelles et le nombre de bord

Nous appelons *bretelle* au sens strict un morceau d'étoffe composé, par deux de ses segments (arêtes) disjoints, avec une autre étoffe sur *un seul composant* de bord de celle-ci.

Nous appellerons *pont* un même morceau d'étoffe lorsque ses deux segments de composition sont sur *deux composants* de bord distincts.

Une surface à bord présente plus ou moins de demi-torsions sur des *bretelles*.

Nous savons maintenant que, de manière intrinsèque, elle en a 0, 1 ou 2 car les bretelles portant des demi-torsions peuvent se réduire par paire à conditions qu'il y en ait au moins une en plus.

De manière intrinsèque il n'y a pas de demi-torsion sur les ponts. Le seul élément présentant un pont étant le tore troué.

De manière extrinsèque il peut s'ajouter des demi-torsions par paire sur une même bretelle ou sur un même pont autant qu'on veut. Cela se déduit des deux chapitres précédents.

Posons-nous un problème à propos des bretelles exclusivement.

Il consiste à décider si les demi-torsions qui peuvent se produire au cours de la construction extrinsèque d'une surface, par l'adjonction de *bretelles* exclusivement, sont des demi-torsions effectives ou non dans l'intrinsèque, car il se peut que certaines d'entre elles ne soient qu'apparentes et cela d'une autre manière que les paires de demi-torsions qui s'effacent de l'extrinsèque à l'intrinsèque.

Donnons un exemple de cette existence intrinsèque apparente d'une demi-torsion à partir de la surface suivante.

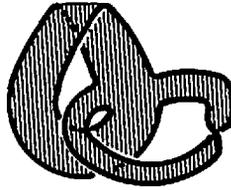
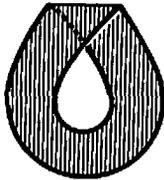


Fig. 1

Nous pouvons décrire cette surface comme une bande de Möbius munie d'une bretelle présentant une demi-torsion. Cette description n'est pas univoque, mais qu'une telle description existe nous suffit pour la suivre, comme protocole de montage et de démontage, et pour conclure dans tous les cas.



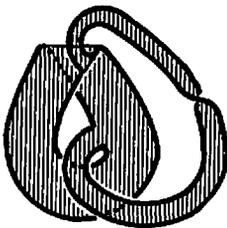
Une bande de Möbius.



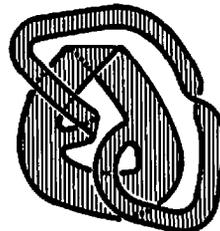
Une bretelle.

Fig. 2

La bande de Möbius n'a qu'un seul composant de bord. Ce morceau de surface est donc bien ajouté à cette surface par une composition réalisée en deux endroits d'un même composant de bord. Il s'agit d'une bretelle et non d'un pont. Montrons par des déformations de la topologie de l'espace dans lequel est plongée cette construction, extrinsèques donc, que cette demi-torsion n'est qu'apparente dans l'extrinsèque comme dans l'intrinsèque.



Nous déplaçons le segment où se compose la bretelle avec la bande de Möbius.



Le passage du pli de la bande de Möbius fait apparaître une demi-torsion supplémentaire.

Nous rapprochons les deux demi-torsions de la bretelle et nous rétractons celle-ci de manière à faire apparaître une boucle.

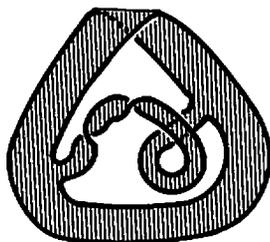


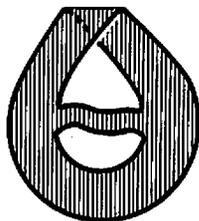
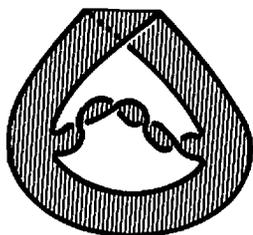
Fig. 3

Intermède :



Fig. 4

où nous montrons qu'une telle boucle vaut pour deux demi-torsions. Cela se voit à suivre les dispositions mutuelles des deux éléments de bord indépendamment de la surface.



Les quatre demi-torsions portées par cette bretelle sont inverses deux à deux, par conséquent elles s'annulent mutuellement

et vérifient-par là qu'il n'y a pas de demi-torsion effective sur cette bretelle.

Fig. 5

Dans son ouvrage [3], le plus proche de notre présentation des surfaces topologiques, Griffiths formule le problème de l'identification des torsions (nous les appelons ici demi-torsions) page 33, à l'occasion d'un montage de surface original. Il montre à son propos que la bretelle, en apparence sans demi-torsion dans ce dessin, en porte une effective de manière intrinsèque.

Donnons-le dans la même présentation.

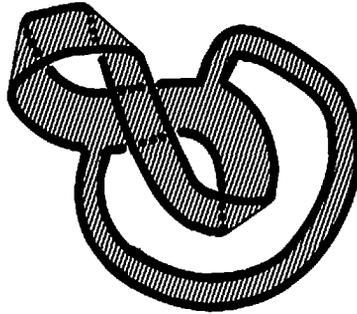


Fig. 6

Nous ne pouvons donc, dans cette identification, nous fier à la forme que présente la surface pour compter le nombre de demi-torsions effectives. Il nous faut trouver un trait caractéristique de la présence ou de l'absence d'une telle demi-torsion et qui soit invariant pour les transformations topologiques.

Dans le cas précis de l'absence ou de la présence d'une demi-torsion sur une bretelle adjointe à une surface, *la variation du nombre de bord* constitue ce trait (voir chap. I, p. 69).

Nous développons le raisonnement à propos d'une description que nous choisissons du montage de la surface. Cette description n'est pas univoque, mais une quelconque description, présentant la surface comme un montage de bretelles successives, donnera toujours le même résultat final. A propos des autres descriptions, le calcul d'invariants décidera de l'identité de cette surface et nous pourrons montrer l'équivalence par un changement de présentation.

Il suffit de remarquer la correspondance trait à trait, dans un cas simple, pour se formuler le principe sur lequel repose le raisonnement. Sa démonstration relève d'un calcul plus ample que nous ne donnons pas ici.

Soit la situation très simple d'un disque.

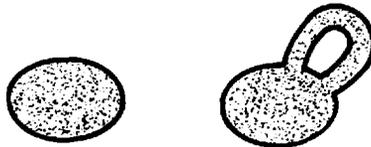


Fig. 7

Si nous ajoutons une bretelle sans demi-torsion sur un même composant de bord d'un montage de surface déjà existant (Griffiths appelle une telle bretelle une oreille non-tordue), nous

constatons ici que cette construction provoque un nouveau composant de bord : $(b = 1 \rightarrow b = 2) = (0 \text{ demi-torsion})$.



Fig. 8

Si nous ajoutons une bretelle présentant une demi-torsion sur un même composant de bord d'un montage de surface déjà existant, nous constatons ici que cela ne provoque pas de nouveau composant du bord : $(b = 1 \rightarrow b = 1) = (\text{une demi-torsion effective})$.

Donnons-nous un critère certain. Si S est une surface, plane ou non, et B une bretelle ajoutée à S comme il convient, B sera dite *tordue* ou *gauche*, c'est-à-dire présentant une demi-torsion effective, si et seulement si la surface S et la surface $S + B$ ont le même nombre de bord.

Cette remarque suffit pour décider du caractère apparent ou effectif de la demi-torsion dans l'exercice que nous avons donné.

Vérifions qu'il s'agit de la solution de notre problème dans le cas de l'exemple déjà résolu plus haut par un changement de présentation.

Pour la description choisie (fig. 2), il y avait un composant de bord pour la bande de Mœbius.



Fig. 9

Il y en a deux dans le montage obtenu.



Fig. 10

Donc il n'y a pas de demi-torsion effective sur la bretelle ajoutée.

Nous comptons les composants de bord, le nombre de bord, grâce à un coloriage du bord en changeant de couleur à chaque fois que nous revenons au point de départ. Il y a autant de composants de bord que de couleurs employées.

2. Surfaces orientables, surfaces non orientables

Nous avons déjà parlé de cette caractéristique des surfaces au chapitre premier. Il s'agit de la seconde grande séparation, après la distinction entre les surfaces à bord et les surfaces sans bord, qu'il faut faire pour s'orienter dans les surfaces topologiques.

Les étoffes ayant deux faces sont dites, de manière manifeste, bilatères ; elles sont, au sens d'une meilleure construction qui réduit cette notion, orientables de la façon dont nous allons le dire. Le lecteur peut retenir qu'elles sont coloriées par deux trames contrastées dans nos dessins.

Les étoffes n'ayant qu'une seule face sont dites, de manière tout aussi approximative, unilatères ; la bonne définition de ce fait conduit à les dire non orientables. Le coloriage de leurs dessins mélange les deux couleurs, elles sont donc monochromes.

Revenons même sur cette notion fort discutable de face dans le contexte de la théorie de la dimension.

Nous ne rejeterons pas ce terme pour autant, dans l'usage manifeste où il sert à désigner les deux faces d'un disque, lorsqu'on veut en changer, ou d'une pièce de monnaie, lors d'un tirage au sort à pile ou face. Pourtant, nous avons déjà dit qu'il s'oppose à l'usage exclusif de ce terme en mathématiques puisqu'elle le réserve pour désigner les faces d'un pavage.

Nous pouvons définir les deux faces d'un morceau de surface grâce à deux flèches opposées et chacune perpendiculaire à cet élément de surface.



Fig. 11

Ces flèches sont dites normales à la surface. Elles ne participent pas de la surface, elles sont en dehors, pour ne lui être attachées qu'en un point. C'est une notion extrinsèque.

Comme notre morceau de surface va s'intégrer à un montage en un pavage de surface comme une face de ce pavage, nous voici en mesure de définir de manière extrinsèque les deux faces distinctes d'une face d'un pavage. Cela n'a rien à voir avec la

théorie des surfaces topologiques intrinsèques, et ne fait que traduire la notion de face que nous badigeonnons de couleur dans nos dessins. Nos coloriages, et par là même nos dessins, sont donc eux-mêmes d'un aspect extrinsèque.

Nous pouvons déjà cerner la raison qui a fait qualifier de monstrueux les montages de surfaces ne présentant qu'une seule face. Pour être bien montée, la théorie des surfaces topologiques doit partir des morceaux de surface sphériquement étalables où les deux normales sont définies et bien distinctes comme opposées. L'involution qui se produit dans certains montages particuliers peut avoir surpris, surtout pour qui pense exclusivement sphérique.

Disons dans ces termes ce que sont les étoffes bilatères et unilatères.

Si aucune transformation d'une de ces flèches (vecteurs) normales à la surface d'un montage ne la conduit à se superposer à son inverse, la surface dans son ensemble est bilatère : elle a deux faces.

Si au contraire, comme dans la bande de Mœbius, un déplacement d'une des flèches parvient à la confondre avec son inverse, la surface est non orientable, unilatère : elle sera dite n'avoir qu'une face. Nous montrons une telle transformation à la surface de la bande de Mœbius.

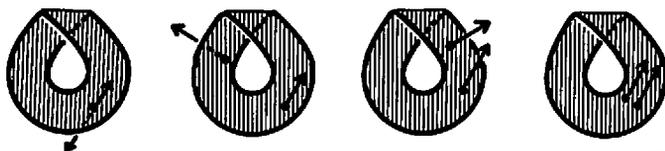


Fig. 12

Malgré leur impropriété et avec ces précisions, nous continuerons à remplacer, dans nos dessins, cette notion de normale (flèche perpendiculaire au morceau de surface) par des coloriages et à parler de faces.

Par contre, cela ne doit pas nous faire faire l'économie d'une bonne définition de ce à quoi correspond la distinction entre surfaces bilatères et surfaces unilatères. Parlons maintenant des surfaces topologiques intrinsèques orientables et non orientables.

Dire qu'une surface est orientable, c'est dire que nous pouvons y définir une orientation et une orientation inverse de telle manière que nous *ne puissions pas* passer d'une orientation à son inverse par une transformation de la topologie.

Donnons un exemple d'une telle orientation grâce à *un couple de vecteurs* dans la surface d'une bande présentant deux plis, comme cela peut être le cas dans un quelconque morceau de surface.

Ces deux vecteurs, pris dans un ordre donné, définissent un angle orienté dans la surface. Cet angle est noté par le couple (x, y) , c'est une notation pour l'orientation de la surface.

L'orientation inverse, c'est la lecture de l'angle inverse (y, x) .



Voici un choix d'orientation à la surface de notre bande, nous le faisons glisser vers le haut et franchir le pli.

Fig. 13

Où nous voyons que la difficulté réside dans le passage des plis. C'est à ce moment-là en effet qu'il est souhaitable de se faire une politique précise de ce que devient l'orientation du couple de vecteurs.



Le couple de vecteurs glisse vers le haut,



Il arrive, de manière continue, jusqu'à la ligne de pli.



Il commence à la franchir en restant solidaire de la surface.



Il continue de glisser après ce franchissement.

Fig. 14

Un couple de vecteurs passe un pli : il subit une symétrie et une rotation dans le plan du dessin. Mais il reste identique à lui-même dans la topologie de la surface.

Après avoir ausculté cette difficulté, nous reprenons notre transformation.



Le repère mobile se dirige vers le bas et passe un deuxième pli pour revenir à son point de départ.

Fig. 15

Dans la surface de cette bande à deux plis aucun déplacement du premier couple de vecteurs ne permet de l'amener à se superposer au couple de vecteurs qui serait son inverse.

Dire qu'une surface est non orientable, c'est au contraire, ayant défini deux orientations inverses — par exemple deux couples de vecteurs inverses dans la surface de la bande de Mœbius —, pouvoir transformer par un déplacement continu dans la surface de la bande le premier couple dans le second ou, pour le dire autrement, les amener à se superposer.

Cela est possible dans le cas de la bande de Mœbius. Voici un déplacement du couple (x, y) qui va venir coïncider avec le couple (y, x) compte tenu de l'orientation de l'angle qu'ils forment. Les deux orientations inverses de l'angle se superposent.



Fig. 16

Notre discussion de la notion de face d'une étoffe, des termes approximatifs de bilatère et unilatère, et de ceux bien construits en mathématique, d'orientable et de non orientable, nous permet d'établir entre eux de sûres correspondances. Parler du nombre de faces, c'est parler d'une manière extrinsèque et manifeste de l'orientation intrinsèque d'une surface. Une surface à deux faces peut être dite bilatère ou orientable, tandis qu'une surface non orientable peut être dite unilatère de n'avoir qu'une seule face.

Le caractère orientable ou non orientable des surfaces sépare leur multiplicité en deux parties. Ainsi la sphère et les multi-tores sont bilatères ; l'espace projectif et ses composés sont unilatères.

La possibilité d'être orientées ou non permet, avec les quatre invariants arithmétiques et algébriques dont nous allons traiter dans la suite, d'identifier et de distinguer les surfaces. Ces quatre derniers invariants n'y suffisent pas à eux seuls puisque pour deux surfaces différentes ils peuvent être les mêmes ; en ce cas c'est le

caractère bilatère ou unilatère qui, coordonné à ceux-ci, évite la confusion.

3. Présentation des invariants intrinsèques des surfaces topologiques

Hors le fait d'être ou non orientable (nombre de faces), il y a deux invariants arithmétiques principaux : l'indicateur d'Euler-Poincaré et le genre d'une surface topologique. Puis deux invariants algébriques : le groupe fondamental et le groupe d'homologie.

Commençons par présenter l'indicateur d'Euler-Poincaré.

a₁ - L'indicateur d'Euler-Poincaré

C'est le premier invariant donnant une véritable caractérisation de chaque surface. Il est une généralisation de la formule d'Euler, déjà connue de Descartes [33], la formule dite des polyèdres.

Dans un polyèdre convexe, agrégat de pyramides (tétraèdres), la somme des sommets moins la somme des arêtes plus la somme des faces² est égale à 2.

Si nous prenons S pour la somme des sommets, A pour celle des arêtes et F pour celle des faces, la formule d'Euler s'écrit alors pour un polyèdre convexe : $S - A + F = 2$.

Donnons l'exemple du tétraèdre, $S = 4$, $A = 6$, $F = 4$.



Fig. 17

Pour suivre la généralisation de ce résultat sous le nom d'indicateur d'Euler-Poincaré, remarquons qu'en topologie un polyèdre convexe est une sphère construite comme un montage de triangles exclusivement (triangulation de la sphère ou sphère triangulée).

2. Ici le mot face est retenu en mathématiques contrairement à l'usage que nous en faisons à propos de l'orientabilité. Il s'agit des triangles délimités par les arêtes, ce sont nos morceaux d'étoffe du début.

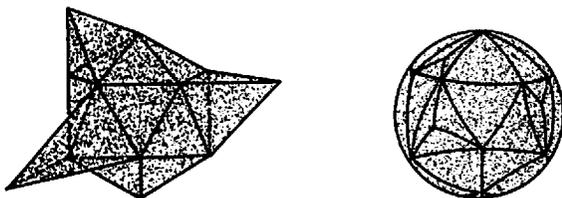


Fig. 18

La formule pour un découpage de la sphère en triangles (une triangulation donnée) devient, si nous appelons $E(S)$ l'indicateur d'Euler-Poincaré,

$$E(S) = S - A + F,$$

où S est le nombre de points dans la triangulation (sommets des triangles), A le nombre d'arêtes des triangles mutuellement cousus et F le nombre de triangles. Chaque sommet et chaque arête, bien qu'étant commun à plusieurs triangles, n'est compté qu'une seule fois.

La formule d'Euler pour les polyèdres convexes, nous dit que le résultat est $E(S) = 2$. Mais ce dernier sera différent pour les surfaces non sphériques. Si nous construisons chaque surface à l'aide de triangles ou si, inversement, nous décomposons chaque surface en morceaux triangulaires, nous pouvons chercher à calculer la valeur de l'expression $E(S) = S - A + F$. Ce nombre est constant pour une quelconque triangulation de la surface considérée.

Donnons l'exemple du tore et le calcul de son indicateur d'Euler-Poincaré à partir d'une triangulation donnée.

$$S = 1, A = 3, F = 2.$$

$$E(S) = 1 - 3 + 2 = 0.$$



Fig. 19

L'indicateur d'Euler-Poincaré peut être obtenu par un découpage ou une construction des surfaces selon d'autres types de morceaux que les triangles. Ces pavages de la surface doivent admettre toutefois des faces qui soient des portions de sphère. N'importe quel morceau de surface (disque dont le bord est muni d'au moins un sommet), comme dans notre définition, donne le résultat obtenu à partir de triangles.

Ce nombre, l'indicateur d'Euler-Poincaré, est constant pour chaque surface de même genre, cela indépendamment de la finesse de la triangulation. La raison peut en être donnée pour chaque surface, ainsi que dans le cas de la sphère, en procédant par raffinement dans la triangulation ou par dégrossissage de n'importe quelle décomposition. Ces opérations, au cours

desquelles le résultat se conserve, consistent en l'ajout ou le retrait de sommets, d'arêtes et de faces.

Donnons un exemple à partir du tétraèdre plongé dans la sphère (fig. 11). $E(S) = 4 - 6 + 4 = 2$. Ajoutons une arête entre deux sommets, eux-mêmes ajoutés sur des arêtes distinctes.



Fig. 20

Dans ce cas de figure, une face donne lieu à deux faces ; il y a une arête de plus et deux arêtes ont été divisées en deux ; deux sommets s'ajoutent. S est augmenté de 2, A de 3 et F de 1. Calculons la conséquence de ces variations sur l'indicateur, soit $2 - 3 + 1 = 0$. L'indicateur $E(S)$ ne change pas puisque l'effet du raffinement de la triangulation est nul, $E(S) = 6 - 9 + 5 = 2$.

Plusieurs surfaces différentes peuvent avoir le même indicateur d'Euler-Poincaré. Il faut donc accompagner cet invariant de quelques autres, par exemple le nombre de bord et la possibilité d'orientation, pour identifier ou distinguer des surfaces sans ambiguïté.

Depuis Clérambault, l'érotisme lié aux étoffes provoque un intérêt qui nous paraît justifié si nous savons le lier à l'écriture. C'est à tracer des graphes, des nœuds et des chaînes consistant dans les surfaces topologiques que cet indicateur de chaque surface se calcule. Ce n'est pas seulement que la surface calcule mais qu'elle s'offre à un calcul dont il semble que l'on puisse avoir l'intuition. Un ouvrage récent s'essaie à de telles variations de l'imaginaire du corps à l'écriture [20].

a₂ - Le nombre de bord

Cet invariant est très important et nous avons été amenés à en traiter déjà dans le chapitre I, et surtout dans le chapitre II. Il correspond au nombre de sphères trouées dans les schémas de Griffiths, augmenté d'une unité.

Cet invariant bien construit permet de traiter des trous imaginables. Nous ne le reprenons pas ici, pour définir maintenant des invariants qui cernent la définition d'un autre type de trou spécifié par le trou torique, trou qui ne présente pas de bord.

a₃ - Le genre

Le genre est l'invariant le plus original de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques. Il est un raffinement de la notion de dimension. Les surfaces sont toutes de dimension 2, localement équivalentes au plan. C'est dire aussi qu'une surface peut être morcelée par un objet de dimension 1, une ligne, un trajet consistant dans la surface (coupure). Nous ne faisons là que rappeler la définition inductive de la dimension, donnée en Introduction (p. 15).

Le genre d'une surface indique un nombre de ces lignes de coupure. Certaines de ces lignes sont particularisées par l'effet qu'elles provoquent de morcellement de la surface. Selon qu'il faut un plus ou moins grand nombre de coupures pour obtenir la séparation de la surface en deux parties disjointes, les surfaces seront dites de genres différents.

Le genre d'une surface quelconque est égal au genre de la surface sans bord qui lui est associée d'après notre première proposition importante, formulée au chapitre II.

Le genre d'une surface sans bord, c'est le nombre *maximal* de coupures fermées que l'on peut effectuer dans cette surface *sans être certain* de la découper en morceaux *disjoints*. Pour un nombre inférieur à celui du genre, nous ne sommes pas sûrs de l'effet du découpage ; pour un nombre supérieur à celui du genre, nous sommes certains que la surface est disjointe.

Prenons des exemples pour montrer la portée de ces propriétés de connexion des surfaces.

Sur un morceau de surface, un cercle provoque toujours une disjonction.



Fig. 21

Les surfaces étant composées de morceaux, cette déconnexion peut toujours être produite sur n'importe quelle surface. Nous pouvons toujours découper par une ligne une surface en deux morceaux disjoints.

Le nombre donné par le genre ne nous indique pas les conditions de disjonction d'une surface, puisque cela est toujours possible comme nous venons de le dire, mais le genre nous dit à partir de quel rang cela se fera nécessairement.

Nous pouvons en inférer aussi du genre des morceaux obtenus.

Dans la surface d'une sphère, on ne peut tracer que des cercles. La sphère est dite de genre 0. C'est le nombre maximal de lignes qu'on puisse tracer sur une sphère sans la disjoindre de manière certaine.

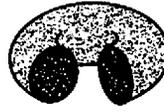
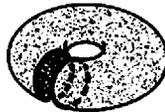
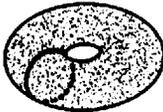


Fig. 22

Dire qu'une sphère est de genre 0, c'est dire qu'une ligne disjoint la sphère de manière certaine.

Sur le tore, il se peut qu'une ligne qui fait cercle comme précédemment disjointe la surface, mais il se peut qu'un cercle découpe le tore en le laissant d'un seul tenant.

Un cercle sur le tore qui le disjoint (2 morceaux).

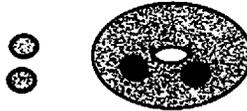


Un cercle sur le tore qui ne le disjoint pas.

Fig. 23

Par contre deux cercles quels qu'ils soient, à condition de ne pas se rencontrer, tracés à la surface du tore le disjoint forcément. Le tore est donc de genre 1, montrons-le par trois dessins.

Deux cercles sur le tore qui le disjointent (3 morceaux).



Deux cercles sur le tore qui le disjointent (2 morceaux).



Deux cercles sur le tore qui le disjoint (2 morceaux).

Fig. 24

Un peu de pratique du tore fait rapidement savoir qu'il s'agit ici de l'ensemble des différentes manières de plonger deux cercles disjoints dans sa surface. Dans chaque cas il y a séparation, un morceau au moins se détache.

Passons encore au double tore où bien sûr, comme toujours, une seule coupure peut disjointre sa surface, et pas seulement la première rencontrée (celle qui découpe une pastille) mais aussi celle-ci.



Fig. 25

Par contre trois coupures quelles qu'elles soient, à condition de ne pas se rencontrer (de ne pas avoir d'intersection), découpent nécessairement le tore de manière à le disjointre. Le double tore est de genre 2.

Voici un exemple extrême de trois coupures disjointant le double tore en deux sphères à trois trous.



Fig. 26

Nous pouvons donner le tableau du genre des surfaces topologiques bilatères. Ce sont la sphère et les multi-tores.

Surfaces : Sphère.
Genres : 0



Tore.
1



Surfaces :
Genres :

Double-tore
2

n-tore
n

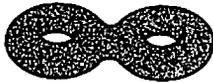


Fig. 27

Pour couvrir l'ensemble des éléments de la théorie exposée au chapitre précédent, donnons le genre des deux surfaces non orientables que sont le plan projectif et la bouteille de Klein.

Le genre du plan projectif est 1 puisque deux coupures disjointes forment sa surface, comme nous le verrons au chapitre VII. Nous traiterons, au chapitre VIII, de la bouteille de Klein qui est de genre 2.

Le 3-plan projectif est de genre 3 ; mais, attention ! les genres ne s'additionnent pas lorsque les éléments de surface se composent. Un composé d'une bande de Möbius (genre 1) et d'un tore (genre 1) n'est pas de genre 2, le composé est de genre 3 puisque notre théorème principal nous indique que cette composition est aussi équivalente à un 3-plan projectif.

Le genre, comme l'indicateur d'Euler-Poincaré, ne suffit pas à lui seul à caractériser une surface. Ici il faut distinguer entre les surfaces unilatères (non orientables) et bilatères (orientables), distinction invariante dont nous avons déjà traité.

Il y a une corrélation très simple entre le genre et l'indicateur d'Euler-Poincaré, mais celle-ci ne vaut que pour les surfaces orientables sans bord :

$$E(S) = 2 - 2G(S),$$

où $E(S)$ est l'indicateur d'Euler-Poincaré et $G(S)$ le genre de la surface.

Cette formule peut être établie par récurrence et vérifiée par la série des résultats dans le cas des surfaces de genres les plus simples.

Dans le cas des surfaces orientables avec bord, il existe encore une corrélation compliquée par le nombre de bord.

Rappelons que ces deux invariants définis pour les surfaces sans bord et orientables peuvent l'être pour les surfaces à bord quelconques.

Le genre d'une surface quelconque est égal au genre de la surface sans bord qui lui est associée d'après notre première proposition importante formulée au chapitre II (p. 80) :

$$G(S) = G(S'),$$

S étant la surface considérée et S' la surface sans bord qui lui est associée.

L'indicateur d'Euler-Poincaré d'une surface quelconque est l'indicateur de la surface sans bord qui lui est associée diminué du nombre de bord.

$$E(S) = E(S') - b,$$

b étant le nombre de bord.

Cette définition tient au fait que chaque composant de bord est compté parmi les arêtes du pavage, qu'il faut leur faire porter un sommet et que par conséquent chaque trou correspondant à ces composants de bord équivaut à la suppression d'une face.

Mais c'est seulement dans le cas des surfaces orientables, avec ou sans bord, que notre première formule devient :

$$G(S) = 1 - \frac{1}{2}(E(S) + b),$$

puisque cette formule n'était établie que pour les surfaces orientables, et que celle-ci est obtenue par le report des résultats que nous venons de rappeler, dans la première.

Nous ne donnons pas de formules équivalentes pour les surfaces non orientables.

a₄ - *Le groupe fondamental*

Le groupe fondamental d'une surface est le groupe que forment les classes de lacets (coupures) homotopes³ dans la surface prise comme espace⁴. Ces lacets sont orientés et pointés, ils ont tous même origine. Homotopes veut dire qu'ils sont équivalents par déformations continues, cela ne s'opposant pas à ce qu'ils se recoupent en eux-mêmes. Il ne faut pas confondre l'homotopie et l'isotopie. L'isotopie est une déformation continue sans recouplement.



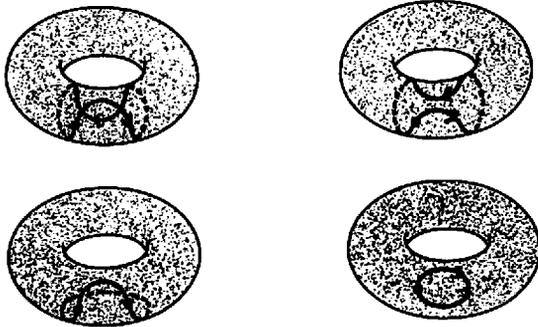
Isotopie du lacet.

Fig. 28

3. *Essaim*, p. 179.

4. *Essaim*, p. 69 et bibliographie sur le groupe fondamental.

Lorsque le lacet se déforme continûment et se recoupe lui-même, il s'agit d'homotopie.



Homotopie du lacet.

Fig. 29

Nous indiquons le groupe fondamental des quatre surfaces sans bord de base.

La sphère : son groupe est trivial puisque tous les lacets, coupés dans la surface, y sont équivalents (homotopes) et réductibles. Ils peuvent être rétractés en un point.



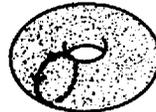
Lacets réductibles.

Fig. 30

Le tore : son groupe Z^2 se définit des deux types de lacets générateurs dits longitudes et méridiens.



Un lacet longitude.



Un lacet méridien.

Fig. 31

Un trajet quelconque dans la surface du tore est un composé quelconque de ces deux éléments de base.

Le plan projectif : son groupe Z_2 se définit de deux types de lacets (0, 1) munis de la loi de différence symétrique⁵.



Générateur.



Réductible.

Deux types de lacets sur la bande de Moebius (plan projectif avec un trou).

Fig. 32

La bouteille de Klein : son groupe est aussi Z^2 , mais quotienté par la relation $a^2 = b^2$.

Pour clore ce bref aperçu sur le groupe fondamental, ajoutons que les groupes fondamentaux des surfaces composées de plusieurs des quatre éléments, énumérés ici se composent eux-mêmes des groupes fondamentaux de ces éléments, selon le principe donné par le théorème de Van Kampen. Ce théorème est l'un des résultats principaux de la topologie algébrique ([7], p. 22; [8], p. 138).

a₅ - *Le groupe d'homologie*

Le groupe d'homologie est le groupe que forment les classes de cycles (coupures) homologues dans la surface prise comme espace. Il existe une correspondance entre les cycles du groupe d'homologie et les lacets du groupe fondamental ([9], pp. 147-148).

Prenons la construction du groupe d'homologie : c'est une autre manière de parler des trajets dans la surface. Elle se fait à partir des triangulations dont nous avons parlé au début de notre chapitre II. Dans le cadre de la théorie de l'homologie, ces triangulations sont écrites en algèbre par des combinaisons linéaires et donnent lieu à une théorie de l'homologie algébrique, détachée des dessins.

Comme nous souhaitons présenter ces éléments de mathématiques, ces théories de fictions, par le recours à des dessins, nous ne ferons ici qu'esquisser une présentation de l'homologie, car plusieurs possibilités s'offrent à nous.

Pour une triangulation donnée, un cycle est un composé fermé (les deux points d'extrémité sont confondus) d'arêtes orientées de ce type de pavage.

5. *Nons*, fascicule de résultats n° 0.

Un cycle peut être fait de plusieurs composants non connexes entre eux. Chaque composant est un cycle en lui-même.

On dit que deux cycles orientés sont homologues lorsque l'ensemble formé de l'un et de l'inverse de l'autre forme un cycle-bord.

On dit qu'un cycle est un cycle-bord lorsque l'ensemble de ces composants détache (non connexité) un morceau orientable de l'étoffe, et qu'aucun de ses sous-ensembles ne produit cet effet.

Les éléments du groupe d'homologie sont les classes de cycles équivalents pour cette relation d'homologie.

La classe formée par les cycles-bord est l'élément neutre du groupe d'homologie.

Donnons un exemple de cycle-bord sur le tore.

Ce cycle-bord, fait de deux composants, est orienté selon l'orientation d'un cycle et l'orientation inverse d'un autre homologue au premier.

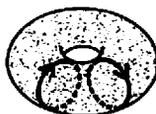


Fig. 33

Donnons un exemple d'un mode de composition dont nous pourrions faire usage pour présenter le groupe d'homologie d'une manière effective. Il faut noter que nous composons les cycles en évitant la coexistence de plusieurs compositions dans le même dessin, ce qui signifie qu'à chaque occasion où nous voulons montrer une composition effective nous reprenons un nouveau dessin de la surface étudiée. Il se trouve que dans le cas présenté ici, sur le tore, le composé effectif est un trajet réductible : cela n'est pas exigé par la définition des cycles-bord.

Nous composons ces deux cycles sur le dessin par une mise en continuité qui respecte leur orientation,



pour ne plus donner qu'un seul composant de cycle-bord qui peut être rétracté par une déformation continue en un trajet réductible à la surface du tore.

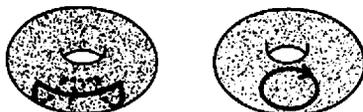


Fig. 34

Dans le cas des surfaces à bord, il existe une théorie de l'homologie relative à ces bords.

Les cycles d'homologie relative ne sont plus uniquement des chemins fermés, mais des chemins qui peuvent avoir leurs extrémités sur les composants de bord.

Les cycles-bord sont aussi définis relativement au bord des trous. Où le lecteur peut voir qu'il est plusieurs usages du terme de bord et, par conséquent, nous devons apporter de la précision, ce que nous allons faire dans la fin de ce chapitre en une présentation de la théorie des surfaces topologiques renouvelée.

Nous ne poursuivons pas plus avant cette présentation par le dessin de l'homologie des cycles à la surface des étoffes.

Pour la bien faire, il faudrait suivre des combinaisons (linéaires) de tours parcourant de manière stricte un graphe à la surface de l'étoffe. Ce graphe est fait de cycles générateurs caractérisant le groupe d'homologie de chacune de ces surfaces topologiques intrinsèques.

Or nous visons à l'étude des plongements de nœuds et de chaînes à la surface de ces étoffes plutôt qu'à des plongements de graphes. Il y a même hétérogénéité entre ces deux types d'objets puisque les composants des nœuds et des chaînes sont caractérisés par le fait de n'être que des cercles (graphes ne présentant qu'un sommet et qu'une arête). Inversement les plongements de nœuds et de chaînes pouvant être écrits dans les termes des groupes d'homologie et d'homotopie des variétés mathématiques, la présentation par le dessin de ces groupes n'est pas négligeable, sa réalisation dépendra de l'aspect autre des surfaces topologiques dont nous parlons maintenant. Cet aspect est transverse et décalé à l'égard de l'homologie.

4. Présentation des surfaces topologiques intrinsèques par des montages orientables et non orientables par morceaux

Maintenant que l'orientation des surfaces topologiques a été introduite et que nous avons esquissé la présentation de leur groupe fondamental et de leur groupe d'homologie, il devient nécessaire de préciser notre propre présentation de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques. Cette précision consiste à distinguer dans chaque cas, parmi nos éléments, en tenant compte de l'orientation.

a₁ - Théorie des découpages orientables par morceaux

1. Les morceaux d'étoffe sont à deux faces (bilatères), chacune de ces faces est coloriée d'une couleur différente, ces couleurs sont rendues par deux trames contrastées dans nos dessins. Chaque couleur correspond à une orientation du bord.

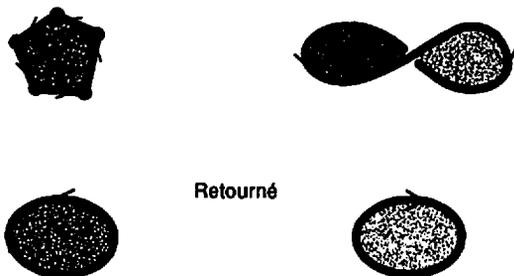


Fig. 35

2. Les montages sont de deux types qui se distinguent en affinant le premier principe.

a - Il y a le montage vrai, il respecte la coloration de part et d'autre de l'arête commune.

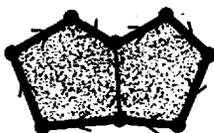


Fig. 36

Cette arête devient une arête de frontière (l'usage que nous faisons du terme de frontière est, à partir d'ici, plus restrictif que dans ce qui précède) telle que l'étoffe est orientée ou colorée de la même façon de chacun des côtés de l'arête. Nous convenons de considérer les arêtes-frontières comme des arêtes qui s'effacent puisqu'elles ne séparent rien.

Ce mode de montage est dit aussi par annulation de segments de bord. En effaçant une arête frontière, nous créons des morceaux faits de plusieurs faces de pavage.

a' - Il y a le faux montage, il ne respecte pas la coloration des morceaux d'étoffe de part et d'autre de l'arête commune. Cette arête devient une arête de bord qui consiste dans l'étoffe.



Fig. 37

Ce mode de montage est dit aussi identification d'un segment de bord de l'un des morceaux à un segment de bord de l'autre morceau. Il n'y a pas annulation des segments de bord, mais au contraire ceux-ci produisent par identification une arête orientée qui ne s'efface pas sans effet de désorientation et que nous n'effaçons dans aucun cas à cet état de la théorie.

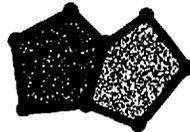
3. Pour le bord, nous conservons la même définition que précédemment, à une nuance près.

Le bord d'une surface est le graphe formé des éléments qui n'ont pas servi au montage vrai.

Bord qui insiste.



Frontière.
Montage vrai.



Bord qui consiste.
Montage faux.

Fig. 38

Nous employons le même terme de bord pour désigner l'ensemble des segments et des arêtes qui forment ce graphe et la réunion ensembliste de ces éléments.

Il y a deux types de bord :

- Le bord qui insiste (ou i-bord). Il est formé de l'ensemble des segments qui n'ont servi à aucun des deux types de montage (c'est l'acception du terme de bord utilisée dans ce qui précède). Les étoffes à bord qui insiste sont les surfaces à bord dont nous parlions au chapitre précédent.

Rappelons que le bord qui insiste est toujours constitué de un ou de plusieurs cercles, nous les appelons les composants de bord qui insiste.

- Le bord qui consiste (ou c-bord). Il est formé de l'ensemble des arêtes qui ont été produites par le faux montage (identification).

A partir de maintenant nous pouvons parler des étoffes à bord qui consiste.

Les étoffes à bord qui consiste :

- Elles peuvent correspondre à des surfaces sans bord de notre présentation précédente, surfaces sans bord qui insiste. Celles-ci sont alors présentées comme des découpages orientables par morceaux dont le bord qui consiste forme un graphe.



Fig. 39

Nous appelons sommets qui consistent les sommets du graphe de bord qui consiste. Ils sont tous de valence paire.

- Nous trouvons des surfaces à bord qui consiste parmi les surfaces à bord qui insiste : dans ce cas le bord qui consiste peut aussi présenter, en plus du graphe, des arêtes qui joignent ce graphe aux composants de bord qui insiste, ou même, plus simplement, ces composants entre eux.

Nous appellerons sommets qui insistent les sommets communs à une arête de bord qui consiste et un composant de bord qui insiste. Les seuls sommets de valence impaire se trouvent parmi eux.

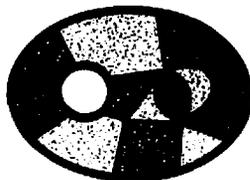


Fig. 40

L'ensemble du bord d'une surface quelconque est donc un graphe. Ce graphe de montage (ou de découpage) est fait :

- de cercles-composants de bord qui insiste ;
- d'un sous-graphe de bord qui consiste ;
- d'arêtes de bord qui consiste reliant les composants de bord qui insiste au reste du graphe et entre eux. Elles sont en nombre pair.

Faisons une remarque sur la théorie de l'homologie :

Les arêtes orientées, qui sont des segments de bord identifiés et qui consistent dans l'étoffe mais ne s'effacent pas (arêtes de bord qui consiste), forment des cycles orientés comptés parmi les cycles orientés de la théorie de l'homologie.

Cela est vrai de l'homologie des surfaces sans bord qui insiste comme de l'homologie relative au bord des surfaces à bord qui insiste. Mais, dans la théorie, il y a d'autres cycles que ceux constitués par des éléments de bord qui consiste, nous les rencontrerons plus loin.

Il y a la frontière :

- La frontière qui consiste en l'ensemble des arêtes produites par le montage vrai (annulation de bord). Cette frontière est un bord nul, elle s'efface dans le découpage orientable par morceaux. En effaçant les frontières, nous pouvons passer d'un pavage orientable par faces à un découpage ou montage orientable par morceaux.

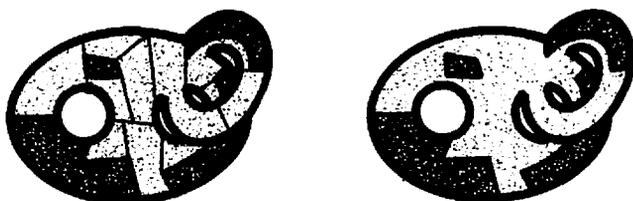


Fig. 41

Nous appelons sommets-frontières les sommets communs aux bords et aux frontières.

Nous appelons les sommets purs-frontières les sommets du graphe de frontières.

Lorsque nous effaçons les arêtes-frontières, nous effaçons en même temps les sommets-frontières et les sommets purs-frontières.

4. Les surfaces topologiques intrinsèques, les étoffes, sont des classes d'équivalence de pavages orientables par faces.

Par l'effacement des arêtes-frontières nous obtenons la présentation de ces étoffes par des découpages orientables par morceaux. Par opposition aux pavages dont les faces sont toujours des portions de sphère, les morceaux sont ici des portions de sphère ou de tore.

Les surfaces topologiques intrinsèques sont des classes d'équivalence de découpages orientables par morceaux.

Les surfaces orientables, étoffes bilatères, sont susceptibles d'être produites par des montages qui ne recourent qu'aux montages vrais. Alors l'ensemble du graphe de montage s'efface puisqu'il n'est fait que d'arêtes-frontières : il ne subsiste que le bord qui insiste, le cas échéant. De tels découpages nuls,

orientables par morceaux, correspondent aux dessins des étoffes bilatères que nous donnons la plupart du temps.

Les surfaces non orientables, étoffes unilatères, ne sont jamais produites par un montage sans le recours à quelques faux montages. De ce fait le graphe de montage comporte nécessairement quelques composants de bord qui consiste.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les étoffes bilatères peuvent être obtenues en employant des faux montages. Nous parlerons dans ce cas d'étoffes bilatères désorientées. Ce sont les découpages orientables par morceaux avec bord qui consiste qui sont dans la classe des étoffes bilatères.

Les étoffes à bord qui consiste peuvent donc être aussi bien des étoffes bilatères que des étoffes unilatères.

Donnons un résultat majeur dans le cas des étoffes à bord qui consiste.

• Corollaire principal : Pour une étoffe, on peut toujours trouver parmi ses découpages orientables par morceaux, avec bord qui consiste, des découpages dont le bord qui consiste est fait d'une unique composant connexe, plongement de cercle.

Nous appelons un de ces cercles-bord qui consiste, coupure qui subvertit la structure. La surface est caractérisée par une quelconque de ces coupures qui subvertissent la structure.

Cette proposition est un corollaire du théorème général de la classification des surfaces topologiques intrinsèques présentée au chapitre II.

Cette classification nous dit quels sont les éléments de surfaces de base et le mode de composition de ces éléments. Le théorème général nous assure que les étoffes unilatères peuvent être présentées modulo une ou deux bandes de Mœbius. Il suffit d'énumérer les présentations des éléments de base de cette classification comme des montages d'étoffes bicolorées et d'étudier leur composition.

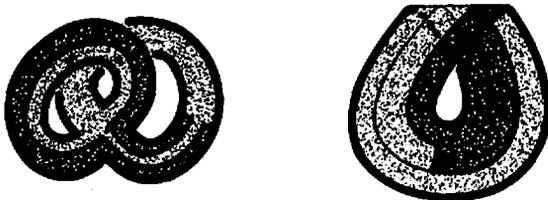


Fig. 42

Cette tâche est finie puisqu'il n'y a que quatre éléments de base. Mais il faut étudier leurs diverses compositions. De plus, afin

d'articuler les surfaces à bord qui insiste aux surfaces sans bord qui insiste, nous pouvons apprendre à fermer de manière orientable par morceaux quelques composants de bord qui insiste.

En faisant cela nous allons affiner la pratique de notre catégorie des découpages orientables par morceaux. Nous reviendrons un peu plus bas sur ce résultat principal et sur l'importance que nous lui accordons.

5. Transformations entre découpages orientables par morceaux laissant invariantes les surfaces topologiques intrinsèques.

Nous retenons quatre transformations d'entre nos découpages. Trois d'entre elles laissent invariante l'étoffe avec bord qui insiste, classe d'équivalence des découpages, et la quatrième ne fait pas varier l'étoffe sans bord qui insiste (sans trou imaginable), celle qui correspond d'après notre première proposition principale à une quelconque surface topologique intrinsèque.

Rappelons en effet au lecteur que notre première proposition principale du chapitre II associe à une quelconque surface topologique intrinsèque une surface sans bord qui insiste. Celle-ci vient de nous servir, dans ce chapitre, pour définir le genre des étoffes avec bord qui insiste.

Énumérons nos transformations en les définissant sur des exemples.

a - L'identification des paires de sommets qui insistent. Les arêtes de bord qui consiste, joignant les composants de bord qui insiste, produisent des sommets qui insistent : ceux-ci sont toujours répartis en nombre pair sur chacun des cercles-composants de bord. Cette transformation fait glisser les sommets qui insistent le long des composants de bord qui insiste jusqu'à les identifier deux par deux.

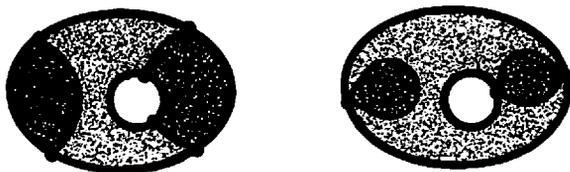


Fig. 43

Le graphe des arêtes de bord qui consiste se présente alors le long des composants de bord qui insiste de manière analogue à son type de connection en graphe dans la consistance de l'étoffe. Chaque sommet est maintenant de valence⁶ paire.

6. *Essaim*, p. 29.

Cela revient à dire, si le lecteur a remarqué que les seuls sommets de valence impaire du graphe de bord ne peuvent se trouver qu'à la conjonction des deux types de bords (sommets qui insistent), que ceux-ci peuvent être transformés de telle manière qu'il ne se trouve plus dans le graphe de bord que des sommets de valence paire.

a' - La disjonction des sommets. Dans un découpage orientable par morceaux, le bord forme un graphe dont les sommets peuvent tous être de valence paire. Notons cette valence $2n$. Un tel sommet est un point de tangence entre n arcs de cercles-composants de bord. Nous pouvons disjoindre ce point en n points, défaisant la tangence de ces arcs de cercles, et créant ainsi la mise en continuité de morceaux d'une même couleur.

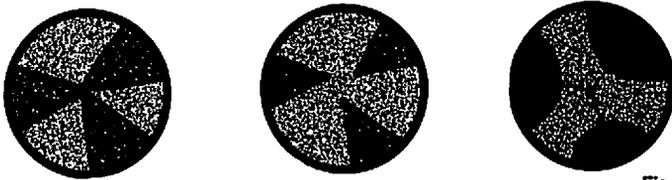


Fig. 44

Des arêtes-frontières peuvent être restituées pour rétablir la séparation de ces morceaux.

Cette disjonction peut être faite de plusieurs façons selon que la mise en continuité est établie entre les morceaux d'une couleur ou les morceaux de l'autre couleur.

a'' - La mise en continuité des composants. La composition des composants de bord qui consiste doit être définie grâce aux arêtes-frontières que l'on peut tracer entre ces composants. Rappelons que les arêtes-frontières ont été effacées : nous pouvons en restituer à n'importe quel endroit, de manière qu'elles scindent un morceau d'étoffe fait d'une seule et même couleur.

Nous composons les composants de bord qui consiste entre eux en les mettant en continuité grâce à un voisinage de telles arêtes-frontières.

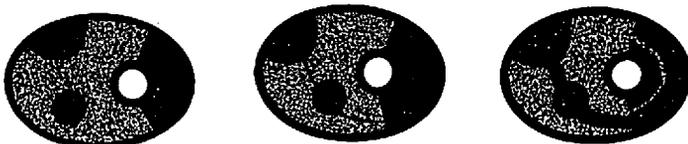


Fig. 45

La fermeture des trous, dont nous avons déjà parlé au chapitre II, doit être précisée ici en fonction du pavage de la pastille

sphérique qui ferme le trou. Dans tous les cas, les arêtes de bord qui consiste se trouvent prolongées par d'autres arêtes de bord qui consiste de manière à se composer en cercles.

Signalons deux cas différents qui peuvent se présenter.

Soit la pastille est orientable dans son ensemble : elle ne présente pas de bord qui consiste. Alors, après fermeture, un segment de son bord qui insiste donne lieu à une frontière en s'annulant avec un segment de bord qui insiste du montage étudié, et un autre segment de son bord qui insiste donne lieu à une arête de bord qui consiste par identification avec le segment de bord fermé dans cette transformation.

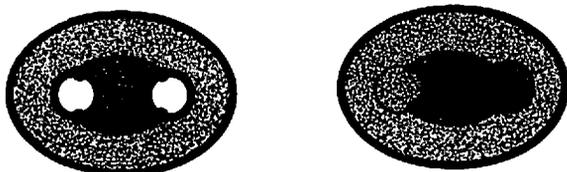


Fig. 46

Soit des arêtes de bord consistent dans la pastille de manière convenable : alors l'ensemble de son bord qui insiste s'annule et ce sont les arêtes consistant dans la pastille qui achèvent en cercle le bord qui consiste du nouveau montage.

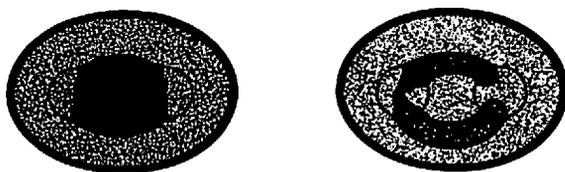


Fig. 47

Soulignons le caractère discontinu de ces quatre transformations entre découpages orientables par morceaux. Elles ne relèvent peut-être pas de la topologie générale telle qu'elle est conçue aujourd'hui, mais préservent la structure de l'étoffe qui est un invariant réputé topologique. Ces transformations mettent en jeu la notion de dimension ou de rétract comme la notion de connexité, et la question se pose de savoir si nous sommes toujours en topologie.

6. Graphes, chaînes et nœuds.

Dans une étoffe à bord qui insiste, le bord qui insiste est un nœud ou une chaîne fait(e) de un ou plusieurs cercles-composants (voir chap. II, fig. 5).

Dans une étoffe avec bord qui insiste, le bord nous met en présence de graphes non nécessairement connexes entre eux. Les

composantes connexes de graphes sont des graphes faits de cercles-composants de bord qui insiste et de bord qui consiste, joints éventuellement entre eux par des arêtes de bord qui consiste.

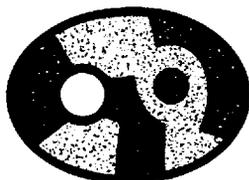


Fig. 48

Dans une étoffe sans bord qui insiste, le bord qui consiste se présente comme un graphe (voir fig. 39).

Dans une étoffe sans bord qui insiste, le graphe du bord qui consiste peut être transformé, par disjonction des sommets, en une chaîne faite d'un ensemble de cercles-composants.

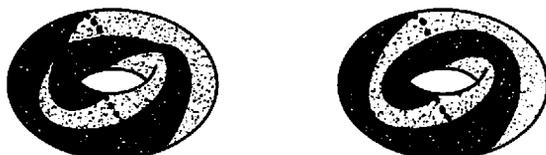


Fig. 49

Dans une étoffe sans bord qui insiste, l'ensemble du bord qui consiste et de la frontière que nous voulons bien y tracer forme un graphe qui peut être transformé, par disjonction des sommets propres au bord qui consiste, en un graphe fait de cercles-composants du bord qui consiste joints entre eux éventuellement par des arêtes-frontières.



Fig. 50

Notre corollaire principal est une conséquence de la proposition selon laquelle, dans une étoffe sans bord qui insiste, la chaîne des cercles-composants du bord qui consiste peut toujours être transformée en un nœud d'un seul composant de bord qui consiste, plongement d'un cercle, obtenu par la mise en continuité des composants de bord qui consiste.

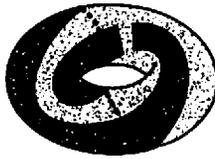


Fig. 51

Cette dernière transformation met en jeu un graphe comportant des arêtes-frontières.

Sous l'aspect que nous venons de présenter, les surfaces ne sont que des montages orientables par morceaux, parmi lesquels nous comptons les pavages orientables par faces, et nous pouvons dire à l'extrême que jusqu'ici il n'y a pas de surfaces non orientables, seulement des constructions d'étoffes unilatères orientables par morceaux.

a₂ - *Les étoffes désorientées*

Nous pouvons procéder à l'effacement du bord qui consiste dans une étoffe. S'il existe un bord qui consiste, c'est qu'à la construction de l'étoffe participe un faux montage de morceaux qui la présente en un costume d'Arlequin diversement orienté. Par cet effacement nous changeons le coloriage de l'ensemble de l'étoffe : elle devient monochrome, elle est coloriée dans son ensemble par une trame hachurée.

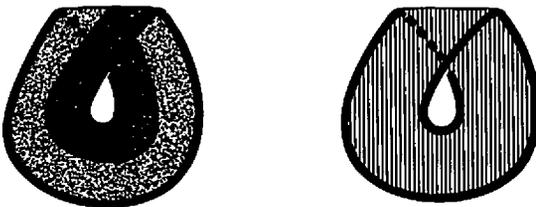


Fig. 52

Cette sorte d'étoffe, non orientable dans son ensemble, peut être bilatère ou unilatère. Bien sûr, à l'extrême, seules les étoffes unilatères sont globalement nécessairement non orientables.

Nous pouvons formuler, dans tous les cas d'étoffes monochromes, un théorème de réorientation.

Théorème de réorientation : Dans le cas d'une étoffe monochrome, il existe toujours des montages orientables par morceaux, réorientant cette étoffe, c'est-à-dire permettant de la recolorier avec deux couleurs, présentant un seul composant de bord qui consiste, celui-ci étant un plongement de cercle.

Ce théorème de réorientation n'est jamais que notre corollaire principal énoncé précédemment.

Nous appellerons coupures les cycles qui consistent dans une étoffe quelconque. Et nous parlerons des coupures qui subvertissent la structure d'une étoffe, en ce qui concerne un quelconque des bords qui consistent fait d'un unique cercle-composant, dont l'existence est assurée par notre théorème de réorientation.

Dans le cas des étoffes à bord qui insiste, où nous rencontrons de multiples arêtes de bord qui consiste, il est bon de voir comment l'unique cercle-composant de la coupure peut être décomposé en ces multiples arêtes de bord qui consiste éparpillées dans l'étoffe et joignant des composants de bord qui insiste.

Prenons l'exemple de la coupure de la bande de Mœbius

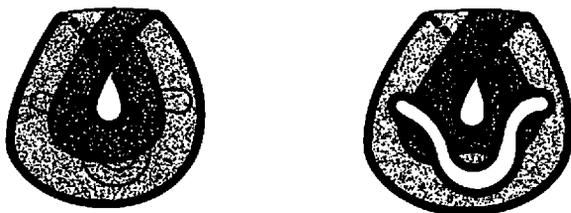


Fig. 53

et de l'effet de l'ouverture d'un trou dont la disposition oscille de part et d'autre du trajet de cette coupure produisant un bord qui insiste, piqué d'arêtes de bord qui consiste.

Dans ces cas, nous pouvons toujours transformer ces découpages orientables par morceaux en d'autres découpages du même type dont le bord qui consiste dans cette étoffe soit fait d'un seul cercle-composant. Cela grâce à nos trois transformations d'entre les découpages orientables par morceaux.

La première transforme les arêtes du graphe de bord en un ou plusieurs cercles tangents au cercle-composant de bord qui insiste.

La deuxième détache ce ou ces cercles-composants de bord qui insiste comme des petites bulles. D'autre part, elle transforme le graphe de bord qui consiste en un ensemble de cercles-composants.

La troisième transformation met en continuité cet ensemble de cercles-composants de bord qui consiste pour n'en faire plus qu'un, sans rien changer à la structure globale de la surface.

Nous sommes dans le cas d'une théorie des surfaces qui peut servir de cadre à la formulation de la théorie de l'homologie où maintenant nous pouvons tracer des cycles orientés quelconques, c'est-à-dire autres que les seuls cycles orientés qui font bord qui consiste. Ces autres cycles ont une fonction de désorientation locale ou de l'ensemble de la surface.

Pour bien faire, arrivés à cette étape, nous devons reprendre l'ensemble de la théorie des surfaces à partir de deux types de morceaux d'étoffe initiaux au lieu d'un seul.

a₃ -Théorie des découpages orientables et non orientables par morceaux

- les morceaux bicolores orientés par l'orientation de leur bord ;

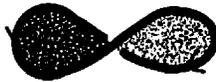


Fig. 54

- les morceaux monochromes, non orientables,



Fig. 55

désorientés par :

· la désorientation de leur bord qui insiste,



Fig. 56

ou par

· l'effacement d'un bord qui consiste en eux.

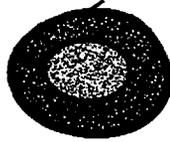


Fig. 57

Il y a donc deux types de morceaux monochromes. Mais cette dernière distinction ne crée pas vraiment de difficulté si l'on sait que les morceaux d'étoffe sont des sphères trouées présentant un seul composant de bord qui insiste, et si l'on tient compte de notre théorème de réorientation. Ces deux cas se ramènent à la même situation à l'aide de nos transformations entre découpages.

Dans cette théorie des surfaces tenant compte fortement de l'orientation, nous pouvons discuter et comparer les différentes présentations topologiques des surfaces. Par exemple, la présentation de H. Cartan, qui utilise l'identification de manière exclusive, semble prendre son matériau parmi les polygones d'étoffes monochromes, mais elle peut être dite à partir de morceaux d'étoffe bicolores en ayant recours à l'annulation de bord et à l'identification. Nous ne le ferons pas ici.

De la même manière, la théorie de l'homologie peut être redite en ces termes de bord qui consiste pour les cycles d'homologie parmi lesquels se distinguent les cycles-bord. La difficulté qui nous a surpris est que cette distinction entre cycles et cycles-bord est transverse par rapport à notre distinction entre bord qui consiste et frontière. Il semble qu'il y ait un renversement entre les étoffes bilatères et les étoffes unilatères dans la correspondance qu'on peut établir entre ces différentes fonctions de coupures. En toute rigueur, il y a trois couleurs et donc une disjonction de cas entre les surfaces topologiques intrinsèques reconnues par la théorie classique.

a₄ - Une modalité du genre des surfaces non orientables

Pour mieux se saisir de la simplicité du résultat principal dans ce qui précède, déduisons de la présentation du chapitre II un invariant donnant la parité du nombre d'éléments mœbiens (plans projectifs).

Le corollaire de notre théorème principal nous permet d'affirmer qu'une surface unilatère quelconque peut toujours voir sa structure (non orientable) se désister pour devenir bilatère (orientable) par l'effet de coupures qui consistent chacune en un cercle unique. Notre théorème principal affirme que dans une surface unilatère la désorientation peut toujours être condensée en une ou deux bandes de Mœbius (voir chap. II).



Fig. 58

En effet, moyennant une bande de Mœbius, chaque paire de bandes de Mœbius se transforment en un tore. Il s'en déduit le corollaire selon lequel le plan projectif (une bande de Mœbius lorsqu'il est troué une fois) et la bouteille de Klein (deux bandes de Mœbius lorsqu'elle est trouée une fois) sont les deux éléments de surface non orientables. Ils sont isolables avec pertinence et sont aisés à réorienter d'une unique coupure circulaire. Il faut la faire médiane dans les deux cas.



Fig. 59

Ces deux types de coupures, qui subvertissent la structure, sont paradigmatiques des deux seuls genres élémentaires de surfaces non orientables. Une quelconque surface non orientable se ramène à un de ces deux types auxquels s'ajoute un nombre indifférent de tores et de sphères.

Remarquons dès maintenant que la première de ces coupures passe par une demi-torsion et donne lieu, une fois effectuée, à une bande de Mœbius, pour dire que son voisinage délimite une bande de Mœbius.

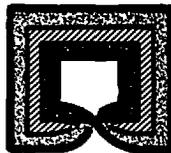


Fig. 60

La coupure du second type passe par deux demi-torsions et donne lieu à une bande bilatère désorientée, ou encore son voisinage délimite une portion de sphère mais celle-ci n'est pas orientable à partir de son bord.

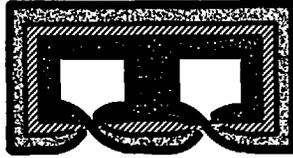


Fig. 61

Le type de la coupure est ici substantifié par une bande de surface, voisinage de la coupure comme nous le rencontrerons au chapitre VII. Ces deux dernières présentations sont sans le tracé rigoureux des plis, elles esquissent le résultat en termes de simples demi-torsions.

Nous ferons un usage essentiel de ces deux types de coupures dans l'investigation de la multiplicité de nœuds⁷.

Une coupure suffit, de dimension un, pour disjointre (rendre non connexe) la face unique d'une surface non orientable en deux faces distinctes, comme une coupure de dimension un peut toujours disjointre en deux parties non connexes une surface de dimension deux. Il s'agit, en fait, si nous faisons des faces de surface un objet topologique, de les présenter comme une variété de dimension deux. Cela se peut grâce à la notion de revêtement ou de doublure. Dans ce cas, les surfaces bilatères ont une doublure faite de deux parts non connexes, et les surfaces unilatères ont une doublure faite d'une surface connexe (un seul morceau). Nous montrerons cela dans le cas de la bande de Möbius au chapitre VII.

Dans le cas des surfaces unilatères, le type de la coupure, pair ou impair, ajoute une précision, comme le genre précise la dimension. Mais il ne s'agit pas alors du nombre de coupures mais du nombre de demi-torsions traversées pour obtenir un effet de discontinuité.

Avant d'apprendre à compter dans le genre du nœud, il faut apprendre à compter dans le genre des étoffes et dans cet autre genre, pair ou impair, des coupures des surfaces unilatères.

7. *Nœud*, fascicule de résultats n°3.

Chapitre IV

A ce lieu de notre naissance...

Le sein

TROU IMAGINABLE

1. Invariants

La sphère est de genre 0.
Son indicateur d'Euler-Poincaré est 2.
Son groupe fondamental est trivial.
Toutes les coupures sont équivalentes.

2. La sphère comme une étoffe sans bord

Nous dessinons la sphère par un cercle dont l'intérieur est tramé, ce n'est pas un trait du dessin nouveau parmi nos conventions. Le cercle est une ligne de pli telle que nous l'avons définie, et la trame dessine une nappe d'étoffe satinée qui en recouvre une autre, comme dans un pli. Cette étoffe sans bord est composée de plusieurs étoffes avec bord si on la découpe, et nous ne faisons qu'effacer dans nos dessins les coutures qui les réunissent pour former cette étoffe sans bord. En aucun cas ce dessin ne peut être confondu avec celui d'un disque si l'on sait distinguer les lignes de pli des lignes de bord.

a₁ - Intension et extension sur la sphère

Pour montrer la simplicité de la sphère, pratiquons une transformation qui met en jeu la seule difficulté qui puisse s'y trouver du fait de sa face cachée au regard.

Nous employons ici le terme de face pour parler de la partie visible et de la partie cachée de la sphère, comme on parle de la face cachée de la Lune. C'est la troisième acception du mot face rencontrée dans cet ouvrage.

En mathématiques, le terme de face a un usage bien défini : il s'agit des morceaux d'étoffe d'un pavage (p. 78). D'autre part l'usage le plus fréquent que nous faisons des termes de bilatère et d'unilatère se réfère à la notion de côtés d'une étoffe (p. 106). Nous préférons à ce terme celui de face plus communément admis à propos d'un disque ou d'une pièce de monnaie, comme nous

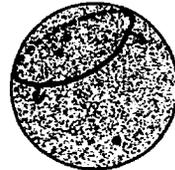
l'évoquions au début du chapitre III à propos de l'orientation des surfaces topologiques.

Si un trajet parcourt la ligne de pli qui dessine la sphère, nous sommes en présence d'un pavage de la sphère, et la face visible et la face cachée de la sphère sont les deux faces du pavage. Il se produit alors un heureux concours de l'usage du terme de face.

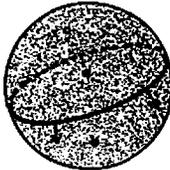
Lorsqu'une portion de trajet parcourt la face cachée, nous la dessinons en pointillé. Pour montrer cela sur un exemple, nous étudions l'extension d'un cercle autour d'un point quelconque de la sphère, selon une déformation continue solidaire de l'étoffe, et telle que ce trajet circulaire ne franchisse à aucun moment le pôle dont il est parti.



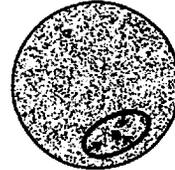
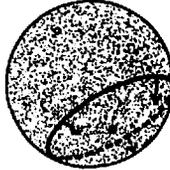
Les flèches indiquent l'extension autour du pôle choisi.



Nous effectuons une déformation du cercle. Une partie de notre trajet passe par la face cachée...



...qu'elle parcourt de haut en bas, comme le fait l'autre portion de trajet sur la face visible.



Puis l'ensemble du cercle se resserre vers l'avant.

Fig. 1

Cet exercice élémentaire présente un premier résultat qui peut passer pour évident. Au terme de son extension, le trajet se resserre en intension autour d'un point distinct du pôle initial. Ces deux pôles sont distincts à la surface de la sphère.

Nous montrons, dans le chapitre I de l'Appendice, qu'il en va tout autrement sur l'étoffe du cross-cap, où l'extension d'un trajet autour d'un point devient l'intension de ce même cercle autour du même pôle.

Cette absence de renversement sur la sphère est un trait de l'absence de topologie sur cette étoffe.

a₂ - Le graphe sur la sphère

La sphère c'est l'absence de topologie : on ne peut rien nouer sur cette étoffe, molle comme une flanelle, et seul le nœud trivial peut y être plongé.

En une première étape de son enseignement, Lacan pose des graphes sur la sphère. Ceux-ci sont le résultat de la fermeture d'un repère orthonormé dessiné sur le plan à la manière de Desargues. Nous montrons qu'il s'agit, en fin de compte, de simples cercles eulériens sur le plan.

Voici un repère orthonormé à la manière de celui qu'utilise Descartes lorsqu'il tente d'écrire la géométrie des courbes planes par des équations de l'algèbre, inventant ainsi la géométrie algébrique.

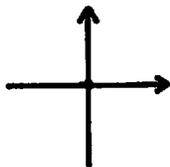


Fig. 2

Les deux axes du repère cartésien sont réputés être infinis. Ils ne se rencontrent pas. Si nous les associons, comme le fait Ferdinand de Saussure, repris par Roman Jakobson, à l'opposition de la synchronie (structure instantanée) et de la diachronie (structure étendue dans la durée), ces deux dimensions de la structure se rencontrent en un autre point. La synchronie rejoint la diachronie.

Nous devons donc disposer ces deux axes de la manière suivante.

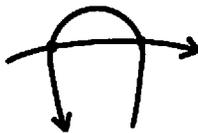


Fig. 3

Cette cellule élémentaire du graphe, le Docteur Lacan l'appelle le point de capiton (E. p. 793 ; S. V). Est-ce si différent de ce que font Descartes, Saussure et Jakobson ?

A vrai dire pas tellement ! La différence apparente tient seulement à ce qu'on a oublié ce qui se passe en fait dans un espace achevé (notion de droite et de plan achevés).

En effet posons ce repère sur la sphère, dont la feuille sur laquelle il était tracé jusqu'à maintenant est une portion (un morceau d'étoffe).

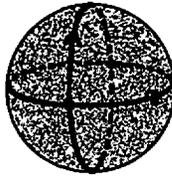


Fig. 4

Il y a un point antipodal sur la face cachée. Ce point vient au devant de la figure.

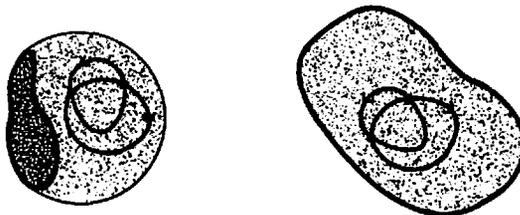


Fig. 5

Nous retrouvons là le point de capiton dans la partie visible de cette figure, en négligeant donc la ligne de pli de la sphère et les pointillés qui ne sont pas visibles.

C'est avec une construction de ce type que le Docteur Lacan commente *Les Ménines* de Vélasquez et le procédé de construction de la perspective linéaire en peinture. Dans ce cas, il n'appuie pas sa démonstration sur la sphère, mais sur le plan projectif, structure du regard, prototype même de la structure, du fait de la prévalence du regard pour le sujet (voir chap. VII).

Sur la sphère de la figure 5, deux cercles se coupent pour former une intersection. Cette situation n'est autre qu'un schéma d'Euler-Venn dessiné sur la sphère sans bord. En trouvant cette sphère, comme nous le montrons aussi figure 20, et en étalant le reste, comme un morceau de soie, nous obtenons ce diagramme dont le cadre rectangulaire est un composant de bord.



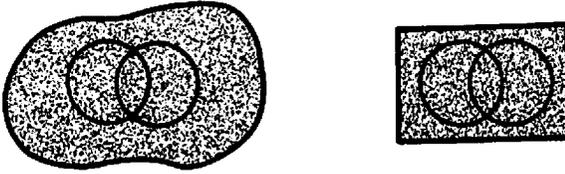


Fig. 6

Notre topologie, par la modification de la logique de Boole, nous fait passer à d'autres schémas que ceux d'Euler-Venn¹.

Dans le séminaire qui introduit ce graphe, Lacan étudie le mouvement de ces deux cercles. Par ce mouvement, ils peuvent être disjoints ou se rencontrer pour former un circuit autour de l'intersection.

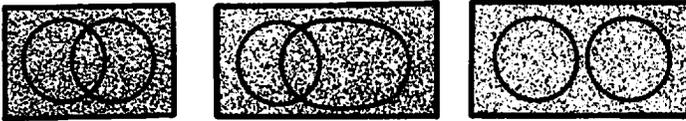


Fig. 7

Nous montrons ce mouvement sur la sphère. Si nous rétractons le bord de ces rectangles, comme on le ferait du shantung, en un point antipodal, nous reconstituons une sphère.

C'est ainsi que nous lisons le second graphe du Docteur Lacan (E. p. 808).



Fig. 8

Ce dessin rend dynamique la situation entre les deux dessins extrêmes de la figure 7 : il montre en une même figure les différents états où discours et langage se disjoignent et se nouent pour établir un circuit.

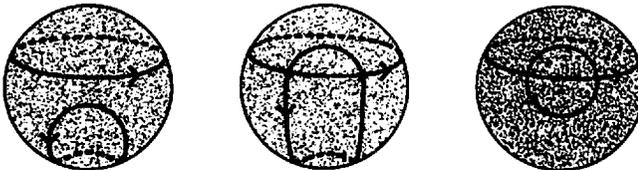


Fig. 9

1. *Nons*, fascicule de résultats n° 0.

Il s'agit bien de la synchronie (langage) et de la diachronie (discours). Cela conduit à une doctrine du langage qui diffère de celle de Jakobson en une de ses articulations. La métaphore repose bien sur la substitution, mais celle-ci ne se produit pas par similarité. Lacan pose la question de la souplesse de la langue ? Selon nous, cette souplesse peut aller jusqu'à ce que métonymie et métaphore, qui doivent être opposées dans la structure, se rejoignent pour inverser leurs rôles, comme synchronie et diachronie. Ces renversements donnent lieu à la première difficulté topologique.

L'absence de topologie à la surface de la sphère provoque cette rigidité qui rend inintelligible la lecture de ces graphes dans leur état final. Il est difficile d'y ranimer leur dynamique dans sa simplicité, tant elle est grossière.

Nous tenons la partie haute du graphe du désir (E. p. 817) comme formulant une esquisse d'articulation des premiers schémas de Lacan. Nous en retrouvons les termes dans la partie basse du graphe que nous venons de commenter. Nous avons déjà dit (Présentation de la série, p. IX) que nous y lisons une composition logique en termes de diagrammes d'Euler-Venn sur la sphère. Dans la partie haute du graphe, un troisième cercle est mis à contribution. Ces schémas sont là pour soutenir une lecture de Lacan et, par-là, une lecture de Freud, où se trouve encore bien peu de topologie puisqu'ils correspondent à la première étape de cet enseignement. Il importe d'en souligner la connexité avec l'intention de Freud qui attache plus de prix au travail du rêve qu'à son sens ou à sa valeur.

Profitons de cette occasion pour montrer la dynamique des schémas de Lacan sur les schémas de Freud.

a₃ - Monstration de l'incidence de la répétition

Donnons avec précision l'articulation des traits de structure que l'exploration de la caverne nous permettra de reformuler en termes d'étoffes. Nous disposons, dans l'Introduction (p. 18) avec ces schémas, d'une esquisse de solution à la composition de la perception avec la conscience.

Décrivons ici l'incidence de la composition de P avec Cs sur la première de nos transformations qui consiste à plier et déplier le schéma F, afin de rendre compte de l'ordre des éléments relevés dans la pratique ainsi assujettis à la répétition freudienne.

Nous utilisons des graisses d'épaisseur différente pour distinguer les trois catégories posées par Lacan. Un trait plus épais

pour \mathcal{J} , moins épais pour \mathcal{S} . La zone \mathcal{R} reste tramée, comme le montrerait un morceau de jersey.

1 - Dans le cas où la zone \mathcal{R} consiste.

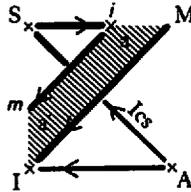


Fig. 10

Si nous déplions notre schéma F, nous obtenons le graphe des lignes du schéma de Freud où l'Ics est divisé en trois. Dans ce cas, nous dirons que l'inconscient est ouvert, puisque le circuit est interrompu par la relation imaginaire qui consiste alors en la zone \mathcal{R} .

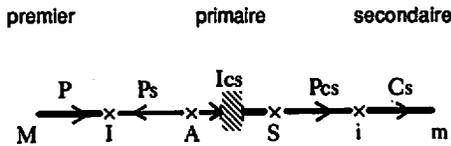


Fig. 11

Nous pouvons lire sur l'arête Ics divisée par le Symbolique, la Réalité et l'Imaginaire, les trois modes de l'identification primaire, soit

- le trait unaire, dans la partie symbolique à partir de A, proche du segment Ps tendu entre I et A ;
- l'amour pour le père, dans la partie hachurée qui fait armature interrompant le circuit ; et
- l'hystérique, dans la partie imaginaire qui aboutit à S, proche de Pcs, tendu entre S et i.

C'est à partir de ces schémas que nous pouvons "faire jardin à la française" de la théorie de l'identification de Freud ([1 m], chap. VII et VIII ; [1 o], chap. XXXIII), selon les indications de Lacan (E. pp. 585-642). Cette théorie est à reprendre à partir de la fonction des masques (E. p. 695) que nous retrouvons dans cette question homologue à l'articulation d'ensemble des deux schémas.

2 - Dans le cas où la zone \mathfrak{R} est rétractée, le cas du schéma L.

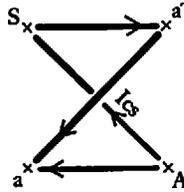


Fig. 12

Les deux segments extrêmes de l'inconscient sont mis en connexion. Le circuit est fermé, il s'agit de la fermeture de l'inconscient (S. XI, chap. X).

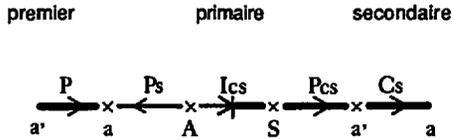


Fig. 13

L'historicité sans l'armature de l'amour pour le père, où conscient et inconscient sont en continuité (S. XXIV).

Après avoir distingué ces trois modalités dans l'Œdipe de la fille à l'occasion du dépliage du schéma F, rappelons les composants de l'Œdipe dit du garçon en soulignant leur place dans ces schémas. Considérons avec Lacan, l'Œdipe typique du garçon, que chaque enfant, de chacun des deux sexes, connaît dans la période dite pré-génitale, à entendre extra-génitale, constitué du triangle Imaginaire dont les trois sommets sont la Mère en M, l'enfant en I, et le phallus, le signifiant du désir de la Mère, en S (S. IV) (voir fig. 10).

Il s'agit du triangle imaginaire (a' , a , S) dans la figure 12.

Nous lisons qu'il se situe dans le graphe déplié, dans les figures 11 et 13, aux deux extrémités du graphe de Freud. On comprend par-là que les stades dits précœdipiens soient analytiquement impensables sans être pour autant inexistantes (E. p. 554). En effet, rien n'indique qu'il puisse y avoir un point sur ce schéma qui soit avant I puisqu'il serait aussi bien après, vu que nos traits les plus épais se retrouvent au début et à la fin. Cela se produit sur la bande de Mœbius (voir Conclusion, p. 292), sur le cross-cap (voir Appendice, p. 323).

Mais inversement, nous pouvons comprendre en quoi l'identification première à l'Idéal du moi, caractéristique de cette situation œdipienne, n'est pas exempte d'un objet préalable comme en toute identification freudienne, même si, dans ce cas, cet objet vient après. L'identification pour Freud reste bien la manière dont

se résolvent les échecs de la demande, l'amour ici d'un objet hérité du complexe d'Œdipe dans son ensemble.

Revenons à l'ensemble de la structure œdipienne. Il s'agit de composer l'Œdipe du garçon, tendu entre les trois sommets du triangle imaginaire, et l'Œdipe typiquement féminin [1 o] qui se situe le long de l'arête Ics. Où l'on voit que cette arête se divise en trois dans le cas du schéma R et strictement en deux dans le cas du schéma L.

La composition de ces deux temps de l'Œdipe dépend de la corrélation de ces deux cas, R et L, par la mise en fonction du père, dans la structure œdipienne. Elle intéresse nos schémas entre I et A en Perception-signes (E. pp. 556-557) dès l'entrée de la caverne. Ces points et cette arête, où se pose au sujet l'énigme de la castration de sa mère, S(A), seront identifiés plus tard à S et i en Pcs. Cette énigme reste celle du devenir conscient, situé par Freud en Pcs [1 n], en tant qu'il y a pour nous quelque manque dans l'Autre qui frappe de son poinçon l'acte en son évanescence, l'échappée de la dimension de l'énonciation pour le sujet.

Mais cette énigme a sa solution. Elle correspond au fonctionnement de l'ensemble de la structure, ici simplement posée (mise à plat sur la sphère). C'est ce fonctionnement dont la partie haute du graphe du désir (E. p. 817) tente de rendre compte sur la sphère exempte de topologie. Nous retrouvons les termes de ces schémas dans la partie basse du graphe et nous avons déjà dit que nous les lisons comme une version logique, en termes de diagrammes d'Euler-Venn sur la sphère, de l'intersection des deux versants du discours et du langage. Cette présentation encore grossière de la structure explique le plongement des schémas à la surface des étoffes de la topologie et notre monstration alors de l'articulation de leur ensemble.

Il est bien évident que ces schémas aussi sont insuffisants à rendre compte de cette structure dans la richesse de ses méandres. Ils ne peuvent servir que ceux qui manifestent quelque goût de l'épure afin de s'orienter dans la suite, lorsque nous traduirons ces questions en termes de nœud.

Nous étudions maintenant les surfaces topologiques jusqu'à présenter celle qui convient à l'articulation de ces schémas, par laquelle nous concluons cet ouvrage.

3. La sphère trouée

La difficulté et l'intérêt de l'étude de la sphère trouée consistent dans sa simplicité et dans l'avantage surprenant qu'elle présente de

pouvoir se mettre à plat dès qu'elle est trouée une fois. La sphère trouée une ou plusieurs fois donne des objets bien connus sous différents aspects mais qu'on oublie de rapporter à cette étoffe sans bord : disque, bande sans demi-torsion, couronne plane.

a₁ - Tentative de construction de la sphère par identification des côtés d'un carré

Nous prenons un carré I^2 (I est égal au segment de la droite réelle $[0,1]$).



Fig. 14

En déformant ce morceau d'étoffe de manière continue à partir de ses côtés, nous refermons la construction en identifiant deux à deux les côtés successifs.



Fig. 15

Le résultat obtenu est une sphère trois fois trouée. Nous montrons par la suite, dans le cas de la sphère à deux trous, ce type d'équivalence.

Replaçons dans cette construction notre carré de départ dans sa position initiale.

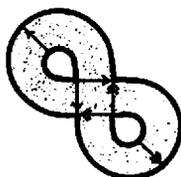


Fig. 16

Nous déformons le carré de départ en déplaçant les flèches qui marquent ses côtés, dans cette figure, et nous obtenons la figure suivante dont les composants de bord ont aussi été déformés.

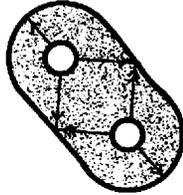


Fig. 17

Nous défaisons cette construction en coupant l'étoffe, comme de la feutrine, le long des côtés précédemment identifiés à l'endroit des deux autres flèches.

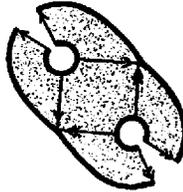


Fig. 18

Il suffit de rétracter l'étoffe de telle sorte que les côtés reviennent en leur position initiale, pour obtenir la présentation du morceau d'étoffe suivante.

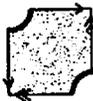


Fig. 19

Les deux quarts de cercle qui écornent le carré initial sont des extensions des deux points opposés par la diagonale dans notre figure de départ. L'extension d'un point (dim. 0) en un segment (dim. 1) et la rétraction d'un segment (dim. 1) en un point (dim. 0) présentent une discontinuité, et c'est par abus de topologie que nous effectuons cela. Cette construction est faite pour expliquer comment nos points aux sommets du carré correspondent à des trous, dans son résultat, dessiné figure 15, où les côtés sont identifiés.

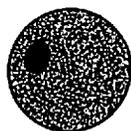
Les deux points opposés par l'autre diagonale donne de la même manière le composant de bord du trou qui est autour de notre construction. Nous pourrions, pour le montrer, écorner le

carré initial en ses quatre sommets. Mais il arrive que certains de ces points se superposent dans l'identification formant l'étoffe sans bord. Les quarts de cercles qui font segments se composent, pour leur part, en formant des composants de bords dans l'étoffe lorsqu'elle est trouée. Les trous dans l'étoffe avec bord correspondent aux points de l'étoffe sans bord.

De cette manière, par identification des côtés, nous n'avons construit qu'une sphère à trois trous. Nous rencontrerons d'autres carrefours de bandes tordues ou non tordues où la superposition des points et la composition des segments se fera de diverses manières. Pour rétablir la continuité de la construction, il faut fermer ces trous par des pastilles sphériques, selon notre proposition principale. Cela représente une contre-discontinuité que nous opposons à la discontinuité, déjà signalée entre points (dim. 0) et segments (dim. 1). En effet, la rétraction du disque (dim. 2) au point (dim. 0) ne se fait pas sans discontinuité. Cette apparente contradiction entre l'intuition et la définition mathématique de la topologie est révélatrice du caractère insuffisant des définitions de la topologie générale qui privilégie plus l'analyse fonctionnelle que l'étude des variétés².

a₂ - Un trou dans la sphère

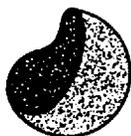
La sphère trouée est un disque, une pastille ou un plateau, lorsqu'on y pratique un seul trou.



Pratiquons un trou dans la sphère. La face intérieure de l'étoffe apparaît au regard.



Nous élargissons la taille de ce trou, découvrant de plus en plus la face interne de l'étoffe.



Le composant de son bord s'agrandit encore...



... jusqu'à ce que l'étoffe puisse être dépliée et mise à plat.

Fig. 20

2. *Essaim*, p. 161.

Dans le dernier dessin, la ligne de pli n'est plus nécessaire. Les deux nappes d'étoffe, qui se superposaient dans les premiers dessins, sont étalées et le pli est effacé.

Ainsi s'entend la déformation qui nous a permis de présenter le point de capiton sur la sphère comme un diagramme d'Euler-Venn (voir fig. 6 et 7). Cette monstration établit, à l'inverse, que les dessins tracés sur une feuille de papier peuvent toujours être réalisés à la surface d'une sphère.

a₃ - Deux trous dans la sphère

La sphère à deux trous est un disque troué, c'est un disque à un trou (voir chap. II, p. 86).

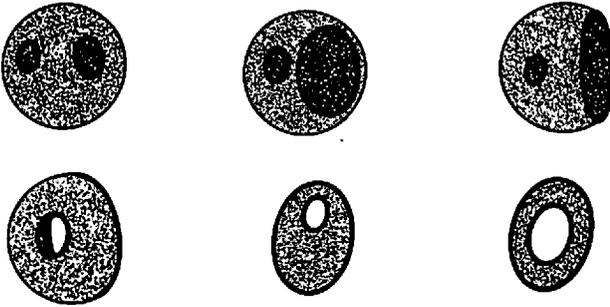


Fig. 21

Le même type de monstration confirme ce résultat. Le trou qui est autour des derniers dessins est un trou imaginable comme celui qui est au milieu. Ce trou qui est autour s'oublie facilement : il nous met sur le chemin qui conduit au trou réel, et provoque la surprise de cette équivalence.

Le disque troué peut aussi être présenté comme une bande bilatère où l'homologie des deux trous se confirme.

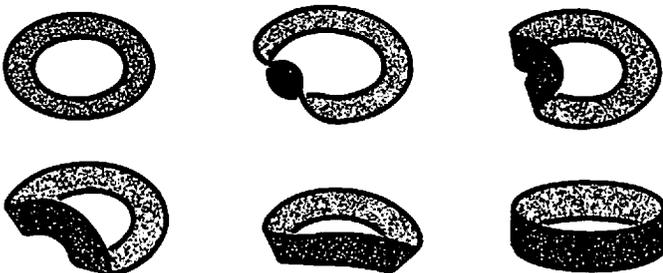


Fig. 22

Le disque troué présenté en perspective grâce à des lignes de pli est bien une ceinture bilatère.

Si nous élargissons l'étoffe de cette bande et rétractons ses composants de bord, nous pouvons présenter cette étoffe comme un tube (tronc de cylindre).



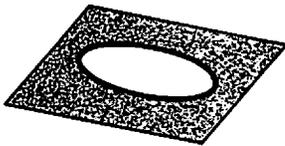
Fig. 23

a₄ - n trous dans la sphère

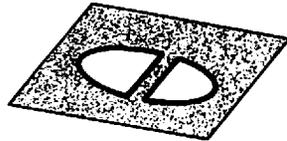
La sphère à n trous est un disque à $n - 1$ trous. Le nombre -1 correspond au passage de la sphère au disque et souligne l'aspect réel du trou qui est autour. C'est celui que nous oublions communément.

a₅ - Passerelle de un trou à deux trous

Au travers d'un trou de la sphère, trou imaginable comme rupture de l'étoffe, nous plaçons un pont non tordu, comme sur un pièce de singalette : nous obtenons deux trous imaginables, le seul type de trous praticables dans la sphère.



Un trou dans un morceau d'étoffe.



Deux trous dans un morceau d'étoffe.
Fig. 24

Le morceau d'étoffe est lui-même une sphère trouée : n'oublions pas le trou qui est autour. Nous pouvons comparer cette situation avec celle du trou mœbien présentée au chapitre VIII.

a₆ - Incidence des trous sur les invariants

1 - Le disque est une *sphère à un trou*, il a le même genre que la sphère par définition du genre.

• Son indicateur d'Euler-Poincaré vaut 1. Nous le calculons grâce à deux graphes relatifs au bord, c'est-à-dire le comprenant.

S = 2
A = 3
F = 2



$$S - A + F = 2 - 3 + 2 = 1$$

Fig. 25

Le chiffrage du nombre de sommets, d'arêtes et de faces est le même dans les deux cas.

• Le groupe fondamental du disque est trivial. Comme sur la sphère, tout trajet est réductible.

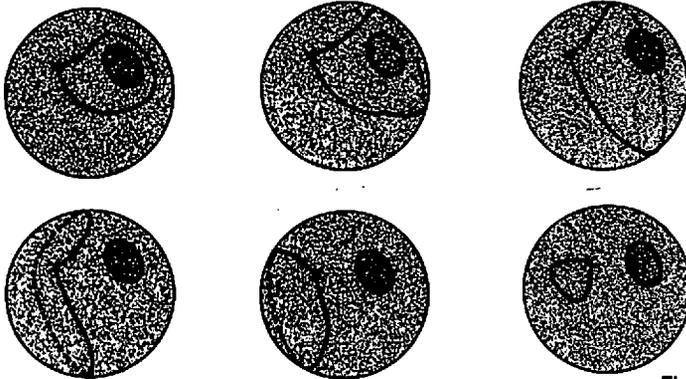


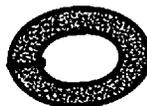
Fig. 26

Un trajet qui cerne le trou semble irréductible mais, en fait, il se réduit grâce à une transformation antipodale. Il parcourt la face cachée de la sphère.

2 - La bande bilatère est une *sphère à deux trous* : elle a le même genre que la sphère par définition.

• Son indicateur d'Euler-Poincaré est 0. Nous le calculons grâce à un graphe relatif au bord.

S = 2
A = 3
F = 1



$$S - A + F = 2 - 3 + 1 = 0$$

Fig. 27

Le nombre F est diminué de 1 si nous comparons cette situation à celle de la figure 25 du disque non troué. Une face du pavage, dans ce cas, a été supprimée : elle correspond au deuxième trou.

· Le groupe fondamental de la sphère à deux trous est le groupe des entiers relatifs. Il y a un seul trajet générateur. C'est celui qui entoure un quelconque des deux trous. Il engendre les trajets non réductibles.

Il peut être présenté, par déformation continue, comme entourant l'autre trou après avoir parcouru la face cachée de la sphère.

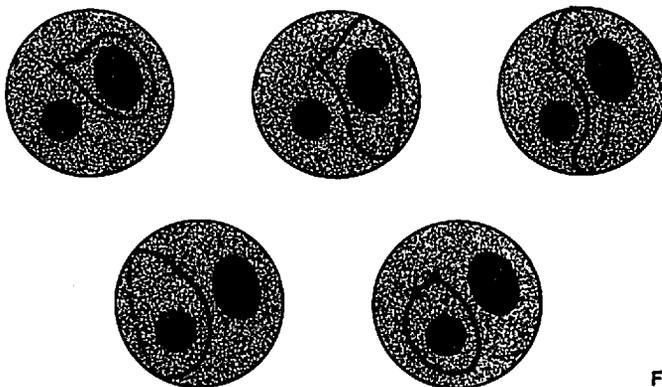


Fig. 28

4. Conclusion

Quand nous dessinons sur une feuille de papier ou sur un tableau, nous dessinons sur une portion de sphère, c'est-à-dire sur un disque, qu'on pourrait découper dans la satinette.

En rétractant le bord de ce disque en un point, nous reconstituons la sphère. Nous pouvons dire, par conséquent, que nous dessinons sur la sphère. Nous dessinerons les nœuds sur la sphère lorsque nous les dessinerons mis à plat sur une feuille de papier, et l'infinitude du plan sera cernée par un composant de bord, un trou, ce sera le point de rétraction. Ainsi, toutes les zones du nœud sont équivalentes à des portions finies de sphère moyennant ce point. Nous rendrons compte des différents changements de présentation d'un même nœud conservant le même nombre de croisements, par le moyen de ce trou imaginable pratiqué en chacune des différentes zones de sa mise à plat.

Cette remarque nous servira pour l'étude des nœuds à partir du fascicule n° 3.

Notre tentative de construction de la sphère, à partir de l'identification des côtés d'un carré, présente le paradigme de la correspondance des composants de bord aux trous imaginables. Ce cas relève de l'évidence, mais aide à se saisir des présentations du tore troué, du plan projectif troué et de la bouteille de Klein trouée en carrefours de bandes, dans les chapitres suivants. Il atteste que les composants de bord des étoffes trouées, traduisant les trous imaginables, correspondent à des points de l'étoffe sans bord.

LA DESCRIPTION DE LA CAVERNE

Chapitre V

La subversion des interdits : le jeu et la topologie Une merde

TROU TORIQUE

1. Invariants

Le tore est de genre 1.

Son indicateur d'Euler-Poincaré est 0.

Son groupe fondamental est Z^2 .

Il y a, hors la coupure réductible, deux types de coupures distincts.

Le n-tore est de genre n.

Son indicateur d'Euler-Poincaré est $2(1 - n)$.

Son groupe fondamental est une composition (somme ramifiée) du groupe du tore simple.

2. Le tore simple

La topologie commence avec le tore. Il est à entendre, ici, que pour nous, la topologie nécessite le nœud, en tant qu'un effet de sujet s'en saisit (*L'Étourdit*, p. 40). Le nœud n'existe pas de la sphère (*L'Étourdit*, p. 41). Un nœud est plongeable dans une étoffe à partir des étoffes de genre un. Le tore est l'étoffe bilatère de genre un et il y a des nœuds toriques qui n'existent que de l'espace extrinsèque au tore.

La composition des schémas, représentée par le graphe à la surface de la sphère, n'est qu'une évocation de la topologie. La nécessité de celle-ci comme articulation de la structure nous invite à commencer son étude par le tore. Parmi les étoffes, celui-ci présente l'historicité jusqu'ici montrée dans le schéma de Freud. Nous le retrouverons, au chapitre VII, dans l'involution signifiante dont il est l'un des termes.

Après avoir défini cette étoffe, la structure du trou torique nous retiendra un moment.

a₁ - Définition

Le tore c'est l'identification des côtés orientés du carré I^2 . Selon un choix d'orientation qui, pour ne pas être unique, n'est pas indifférent.



Fig. 1

Les flèches simples et doubles qui marquent les côtés de ce carré indiquent les identifications à effectuer en respectant leur sens.

Identifions les deux flèches simples pour obtenir une portion de cylindre.

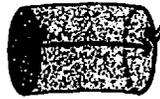


Fig. 2

Nous pouvons tordre, de gauche à droite et par derrière la figure, ce cylindre de manière à former un anneau.

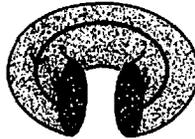


Fig. 3

Les deux cercles extrêmes qui se rejoignent portent les flèches doubles, que l'on peut identifier.

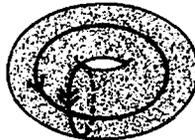


Fig. 4

Inversement, le tore ainsi obtenu, présenté comme un anneau, peut être découpé selon un graphe, et nous redonne un morceau d'étoffe rectangulaire, comme une cretonne, équivalent au carré de départ.



Fig. 5

a_2 - Différentes présentations de l'étoffe torique

Nous utilisons principalement trois présentations.

• Le tore présenté comme un anneau correspond bien à la définition du tore comme identification du carré.

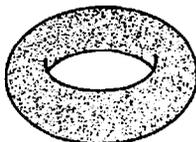


Fig. 6

• Nous pouvons aussi recourir à la présentation du tore simple, faite de n sphères réunies par n tubes, dite, suivant l'usage anglo-saxon, *n-sphère-à-tubes*.

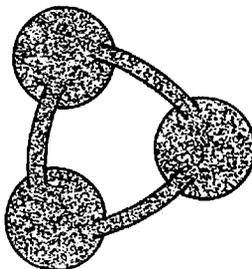


Fig. 7

Cela peut se faire jusqu'au cas où n égale 2, soit la présentation du tore en une *2-sphère à tubes*.

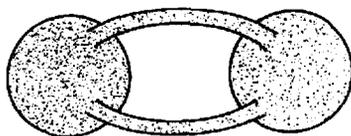


Fig. 8

• Dans le cas où n égale 1, nous disons cette sphère munie d'une anse, *la sphère à une anse*. C'est une autre présentation de l'étoffe torique. Nous l'utilisons pour l'étude de trajets toriques.

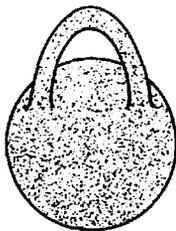
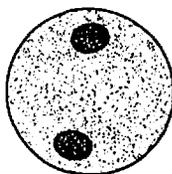


Fig. 9

Décrivons la sphère à anse : c'est une sphère sur laquelle on fait deux trous imaginables comme ruptures de surface aux bords desquels on vient brancher une anse.



Une anse.



Une sphère à deux trous.

Fig. 10

Ces deux éléments d'étoffe sont deux présentations différentes de la sphère à deux trous (voir chap. IV).

Mais nous n'avons pas précisé comment brancher le tube (l'anse), lui-même une sphère à deux trous. Ce branchement peut être effectué en traversant la sphère par l'intérieur.

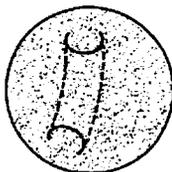


Fig. 11

Il est à noter l'équivalence du branchement de l'anse à l'intérieur avec le branchement de l'anse à l'extérieur. Cette équivalence est une curiosité du trou torique, dont nous commençons à éprouver ici le caractère double. Comme une pièce de tarlatane, elle présente la difficulté, dite du manchon par Pierre Soury, qui nous fait préférer la présentation du branchement extérieur.

Cette dernière présentation de la sphère à anse justifie le dessin du tore présenté comme un anneau.

Dessignons l'anse comme une bande bilatère, vue en perspective, que nous plaçons dans une sphère percée de deux trous, ici dessinée à droite.

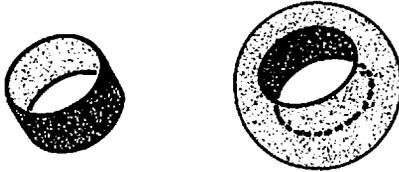


Fig. 12

Conjoignons ces deux morceaux d'étoffe de manière à annuler leur bord.

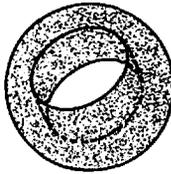


Fig. 13

Du fait de la fermeture de l'étoffe, certains traits ne se voient plus. Ils sont en pointillé.

Nous supprimons les traits qui ne sont plus pertinents :

- parce qu'ils ne marquent pas une différence du nombre d'épaisseurs d'étoffe (les deux portions d'ellipse) ;

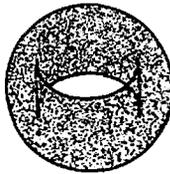


Fig. 14

- parce qu'ils ne se voient pas et qu'ils sont en pointillé.

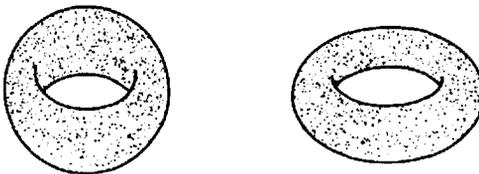


Fig. 15

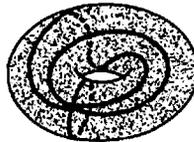
Nous obtenons bien la présentation en anneau lorsque nous déformons légèrement ce tore. A faire disparaître la difficulté du manchon de Pierre Soury, nous retrouvons une présentation qui ne laisse même pas soupçonner cette difficulté. Elle s'est éliée.

L'équivalence entre les trois présentations se légitime du fait que les invariants sont les mêmes pour les unes et pour les autres. En rétractant la sphère dans la sphère à anse, ou les deux sphères dans la présentation en sphères à tubes, nous obtenons la première présentation en anneau.

a₃ - Calcul de quelques invariants

1) Calcul de l'indicateur d'Euler-Poincaré

Nous l'effectuons à partir d'un graphe qui découpe le tore en un carré dont les côtés sont cousus deux à deux (selon nos principes de montage des étoffes). Ce graphe a un sommet, trois arêtes et deux faces ce sont les deux triangles d'étoffe obtenus en découpant effectivement le tore suivant les arêtes de ce graphe.

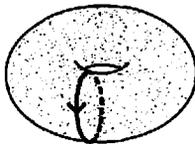


$$S - A + F = 1 - 3 + 2 = 0$$

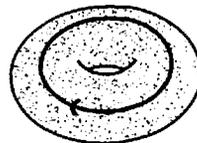
Fig. 16

2) Calcul du groupe fondamental

Le groupe fondamental du tore est \mathbb{Z}^2 . N'importe quel trajet se ramène à un élément du groupe $G = \{x, y / xyx^{-1}y^{-1} = 1\} = \mathbb{Z}^2$, dont les deux générateurs sont dits tour méridien et tour longitude.



Un méridien x.



Un longitude y.

Fig. 17

Le groupe est commutatif (abélien), du fait que $xyx^{-1}y^{-1}$ égale l'élément neutre. Ce composé s'appelle un commutateur¹.

Montrons cette propriété en construisant le commutateur.



Un commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$.

Fig. 18

Le trajet ainsi composé peut être rétracté,

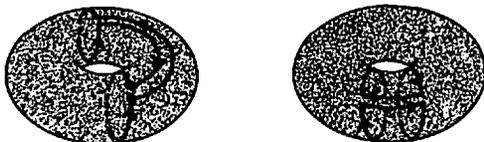


Fig. 19

jusqu'à se réduire à un point : il est donc neutre.

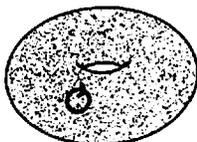
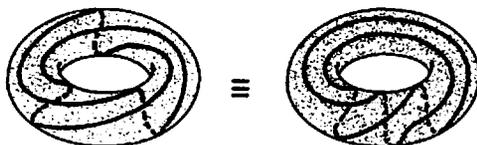


Fig. 20

Du fait de l'écriture du groupe fondamental, un trajet quelconque peut être écrit à l'aide d'un couple de nombres relatifs, ce sont les exposants m et l des générateurs x et y de notre groupe.



x^3y^2 soit $(3, 2)$.

Fig. 21

Cela permet de distinguer les trajets toriques grâce à deux nombres entiers (m, l). Nous devons à J.-C. Terrasson un procédé de calcul des trajets toriques sur le dessin. Avant d'en donner le

1. *Essaim*, p. 133.

principe, nous remarquons qu'il y a une symétrie entre nos trajets générateurs x et y .

Les tours méridiens et les tours longitudes, comme chaîne et trame de basin, s'échangent dans un retournement du tore. Celui-ci peut être effectué grâce à un trou imaginable comme rupture de surface. Nous renvoyons donc cette question au chapitre suivant, où il sera traité du tore ainsi troué. Il ne faut pas confondre ce type de trou dans l'étoffe, qui produit un composant de bord, avec le trou spécifique du tore qui ne présente pas de bord. Ce trou torique spécifique ne révèle-t-il pas deux dimensions qui peuvent s'échanger ?

a₄ - Le trou torique

Le tore présenté en anneau insiste au travers des changements de présentation. Nous l'utilisons implicitement dans le commentaire des nuances que présente le trou torique.

De manière intrinsèque, le tore n'a pas de trou. C'est dire qu'un quelconque trajet parcouru dans l'étoffe du tore ne rencontre jamais aucune singularité. Le trou torique reste un invariant intuitif dont la définition rigoureuse nécessite une bonne construction. Cette construction révèle un invariant qui surprend la notion de trou que nous pouvions nous faire au départ. A qui est sujet (intrinsèque) au tore, seul le principe du groupe fondamental de l'étoffe torique permet de compter le nombre de tours et d'apercevoir, du fait de deux types de trajets générateurs, qu'il y a du trou, et qu'il y a du double. Nous appelons trou la singularité ainsi signalée, mais il n'y pas de bord. Le comptage des générateurs du groupe fondamental de la sphère présentant des trous imaginables nous a appris la réserve à respecter avant de conclure du nombre de trous. Disons qu'il y a du trouble, sans plus de précision. Ces deux générateurs, qui comptent les nombres de tours, sont équivalents, du fait du retournement où s'échangent méridiens et longitudes. Nous ferons voir cela d'autant mieux au prochain chapitre grâce au retournement du tore. Cette équivalence prête à l'oubli de leur différence, à leur confusion, bien caractéristique de cette structure torique où leur dualité est souvent comptée pour un.

Signalons déjà à cette occasion que les générateurs du groupe fondamental intrinsèque de l'étoffe étant comptés comme deux coupures non triviales, un troisième type de coupures de ce même groupe reste oublié. Ce sont celles qui sont du type de l'élément neutre, le trajet réductible. Elles produisent un trou imaginable sans changer le genre de l'étoffe par opposition aux coupures correspondant aux générateurs et à leurs composés non neutres.

Il est une autre façon de compter pour un le trou torique. Le tore est dit de genre un car il suffit de deux coupures, qui ne se rencontrent pas (cela exclut qu'elles correspondent aux deux générateurs du groupe fondamental puisqu'ils ont un point commun), pour disjoindre la surface en deux morceaux. Nous avons pris l'exemple du tore dans notre chapitre III. Le genre, invariant intrinsèque, parle de l'extrinsèque. Montrons-le.

Dans l'extrinsèque, pour qui prend le tore en objet, celui-ci présente un trou d'un type spécial puisque, même considéré ainsi, il n'a toujours pas de bord. C'est le trou torique qui n'est pas à imaginer comme rupture de surface. Il est à prendre comme structure (*L'Etourdit*, p. 42). Pour compter le nombre de trous, il faut passer au travers de chacun d'eux ; c'est encore le groupe fondamental, mais de l'espace ambiant cette fois. Ce groupe a, comme dans l'investigation intrinsèque, un élément neutre à ne pas oublier (dans cette structure algébrique, cet élément est bien différent des autres éléments). Le groupe fondamental de l'espace environnant le tore se construit d'un unique générateur qui emprunte le trou torique correspondant au genre un du tore. C'est en tant que ce groupe a un générateur que le genre un du tore, invariant intrinsèque, semble parler de l'extrinsèque. Pour le groupe fondamental de l'espace environnant, l'extériorité du tore ne constitue qu'une seule région connexe parcourue par un quelconque trajet du groupe, et l'on peut se reporter à la première réflexion de Lacan à propos du tore (E. p. 321). Remarquons, à l'inverse, que nous pouvons de cette région distinguer deux trous. Celui de l'extériorité centrale, le trou torique proprement dit que ne parcourt jamais un trajet réductible et que traverse le trajet générateur. Et celui de l'extériorité périphérique, le trou autour du tore, que le trajet réductible, correspondant à l'élément neutre du groupe fondamental de l'espace environnant, parcourt. Là encore, si l'on ne tient compte que de l'élément générateur du groupe, un trou reste oublié. Il s'agit du trou réel, celui que pour finir le Docteur Lacan présentera comme le trou de la droite infinie, celui qui est autour. Impensable d'être évident, il connote le refoulement originaire que nous ne pouvons penser du fait d'être dedans. C'est l'évidence qui confine à l'évidement (élément neutre).

Le genre, défini dans l'histoire des mathématiques, comme invariant intrinsèque, peut donner lieu à un genre topologique correspondant mieux au trou torique. Nous qualifierons ce genre de nodal, c'est le genre mathématique augmenté de un. Dans la composition de plusieurs tores afin de construire un multi-tore, les nombres de trous toriques s'additionnent et les éléments neutres s'identifient. Nous calculons ainsi dans le genre du tore $N + 1$

ajouté à $M + 1$ donne $N + M + 1$. Cette réflexion doit être poursuivie dans le genre des nœuds.

Afin de distinguer et d'identifier le concept analytique de névrose avec l'invariant topologique qu'est le trou torique, revenons à l'étude intrinsèque.

Pour présenter la structure de la névrose, le Docteur Lacan utilise le tore en s'appuyant sur les trajets qu'on peut y effectuer et en relevant l'existence du caractère double du trou torique. Il est de fait, comme nous le disions plus haut, qu'il est évident d'oublier une part de cette caractéristique, en la simplifiant.

Lorsque nous faisons deux tours méridiens et que nous tentons de revenir au point de départ pour fermer le trajet, il faut faire un tour longitude qui dans ce cas se trace comme tel.

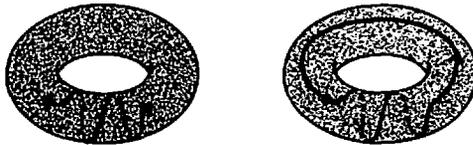


Fig. 22

Après avoir parcouru un grand nombre de tours méridiens, nous sommes ramenés au point de départ et, du même coup, le tour longitude effectué reste oublié.



Fig. 23

La structure de la névrose, hors l'oubli de ce tour supplémentaire, c'est la confusion des deux tours. Nous dirons, pour ne plus l'oublier, qu'un tore, c'est deux tores enlacés. Un tore, c'est aussi bien son retourné. Ne pas distinguer, ou confondre, tour méridien et tour longitude conduit à prendre la demande de l'Autre pour son désir.

Il y a une autre dimension ouverte par la structure du tore. Les tours méridiens dits, dans un premier temps, tours de demandes, sont parcourus en une métonymie (il s'agit du glissement d'un trait prélevé sur l'objet). La cause de cette répétition, qui cherche à s'achever, est donnée par l'existence de cette autre dimension, celle du désir, du trou torique. Elle est reflétée par l'autre tore.

Dans un deuxième temps, Lacan dit cette même structure à partir de l'autre tore. Celui-ci est enlacé au premier dont il est le retourné.

Le névrosé rencontre cette difficulté à demander. Belle âme de la folie, il en vient aux reproches. Il y a une folie névrotique où le sujet est autant parlé par l'Autre que dans la psychose du fait de méconnaître le désir. De piètres cliniciens, qui ont le goût de l'ordre plus accentué que des enfants, confondent souvent dans la folie ces deux structures. Lacan a trouvé l'amorce de sa présentation des chicanes de la demande et du désir en une lecture de la trente-troisième conférence de Freud d'*Introduction à la psychanalyse, La féminité*, dans la question de ce que la fille demande à sa mère.

a5 - *Les trajets toriques, les nœuds toriques*

Sur l'étoffe d'un tore, prise comme un morceau de coutil, nous pouvons effectuer des trajets qui se composent d'un ou plusieurs tours méridiens et d'un ou plusieurs tours longitudes. Il existe, entre le nombre de tours méridiens (m) et le nombre de tours longitudes (l), une corrélation qui permet de déterminer si le trajet effectué est fait de plusieurs cercles ou d'un seul.

Un lacet torique est un parcours fermé, un cercle, consistant dans l'étoffe du tore. Il correspond au plongement d'un nœud fait d'un seul rond de ficelle, dit nœud torique qui n'existe pas comme nœud de manière intrinsèque au tore. Si l'on peut toujours composer entre eux des longitudes et des méridiens, leur composition ne donnera pas toujours un lacet torique mais, dans certains cas, plusieurs cercles consistants ensemble, c'est-à-dire plusieurs lacets. Ce dernier cas correspond au plongement d'un nœud fait de plusieurs ronds de ficelle, soit une chaîne.

• Calcul des lacets toriques sur le dessin

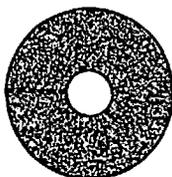
A partir d'un nombre donné m de tours méridiens et d'un nombre donné l de tours longitudes, nous pouvons tenter de tracer le trajet torique, fait d'un ou plusieurs lacets, composé par ces tours. Si m et l sont des nombres premiers entre eux (c'est-à-dire s'ils n'ont d'autre diviseur commun que 1, comme 6 et 7, ou 8 et 13, ou 1 et 2), la composition des tours méridiens et longitudes produit un unique lacet (nœud torique).

A l'inverse si m et l ne sont pas premiers entre eux (c'est-à-dire s'ils ont un autre diviseur commun que 1, comme 2 et 4, ou 3 et 15) leur composition produit plusieurs lacets (correspondant à une chaîne).

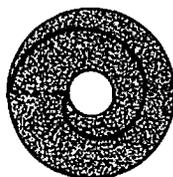
Donnons quelques exemples de trajets toriques, en commençant par des nœuds toriques.

1) *Un tour méridien et un tour longitude*

Commençons par le plus simple de ces trajets, $m = 1$ et $l = 1$. Ils sont premiers entre eux, leur composition doit produire un lacet torique unique. Vérifions-le.



Nous parcourons une portion de trajet méridien que nous traçons en pointillé car nous l'effectuons sur la partie non visible.



Nous relierons les deux extrémités de cette portion de trajet méridien. Le trajet est fermé.

Fig. 24

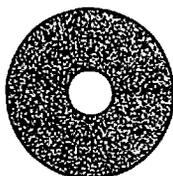
Il est bien composé d'un seul lacet : c'est un nœud torique trivial.

Nous convenons, dans ce type d'exercice, d'un principe qui en facilite la réalisation. Il s'agit de tracer les premiers les portions de tours méridiens comme passant par-dessous, en pointillé. Ce principe facilite le comptage puisqu'il laisse la place au dessus pour tracer les portions de trajets longitudes.

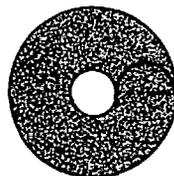
Les portions de trajets méridiens tracés en pointillé, correspondent bien à des tours méridiens. Pour le montrer prenons le cas le plus simple d'un trajet qui ne fait qu'un tour méridien.

2) *Un tour méridien et zéro tour longitude*

$m = 1$ et $l = 0$, ils sont premiers entre eux.



Plaçons notre portion de trajet méridien.



Pour réunir les deux extrémités de la portion de trajet méridien, sans effectuer de tour longitude, il suffit d'un arc par-dessus.

Fig. 25

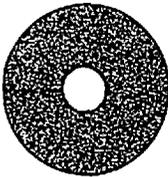
Dans ce cas rudimentaire, nous constatons qu'une portion de trajet méridien correspond à un tour méridien. Dans les cas plus compliqués, les portions de trajets longitudes par au-dessus, servent aussi à achever les tours méridiens amorcés par en

dessous. De même, les portions de trajets méridiens conjoignent les portions de trajets longitudes pour composer des tours effectifs.

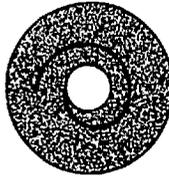
Dans la suite, nous emploierons le terme de méridien pour désigner chaque portion de trajet méridien, et de longitude pour parler de portion de trajet longitude.

3) *Un tour méridien et deux tours longitudes*

$m = 1$ et $l = 2$ sont premiers entre eux, leur composition doit produire un lacet torique unique.



Sur le tore nous traçons un méridien.



Nous relient les deux extrémités de cet élément méridien par une courbe décrivant deux tours longitudes. Au terme du premier tour le longitude semble recouper le méridien alors qu'ils ne passent pas sur la même nappe d'étoffe.

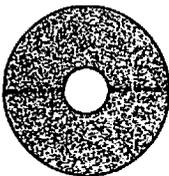


Fig. 26

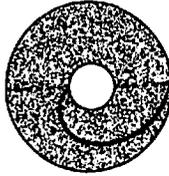
Le trajet est bouclé. Il est composé d'un seul lacet.

4) *Deux tours méridiens et un tour longitude*

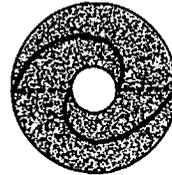
$m = 2$ et $l = 1$ sont les nombres choisis dans l'exemple précédent, dont nous avons échangé les attributions.



Nous traçons les deux méridiens. Ils partagent le tore en deux parties.



D'un méridien à l'autre sur la première partie nous effectuons un demi-longitude.



Le trajet se poursuit et se boucle sur l'autre partie du tore par un second demi-longitude.

Fig. 27

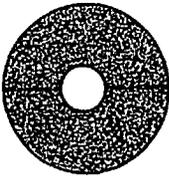
Deux portions d'un demi-tour longitude chacune ont été effectuées, soit un tour longitude.

Nous pouvons remarquer qu'entre le trajet précédent ($m = 1$ et $l = 2$) et celui-ci ($m = 2$ et $l = 1$) il y a entre le nombre de méridiens et le nombre de longitudes une inversion qui est celle

que nous retrouverons plus loin, lorsque nous effectuerons le retournement du tore (voir chap. VI). Dans ces deux parcours du lacet sur le tore, méridiens et longitudes ont échangé leur rôle.

5) Deux tours méridiens et trois tours longitudes

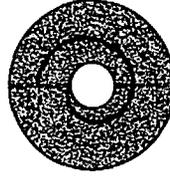
$m = 2$ et $l = 3$ sont premiers entre eux. Nous tracerons les longitudes par 2 portions de $3/2$ tour, soit deux fois un tour et demi. La portion de tour longitude peut être inférieure, égale ou supérieure à un, selon les cas.



Traçons les deux méridiens.



Amorçons le trajet en effectuant un demi-tour longitude



Nous avons effectué un tour longitude complet, soit deux demi-tours.



Ici s'effectue le troisième demi-tour, pour achever la portion de $3/2$ tour longitude.



Nous traçons la seconde portion longitude, de l'extrémité centrale du segment atteint à l'extrémité périphérique du segment initial, faisant ainsi le second tour et demi qui boucle le trajet.

Fig. 28

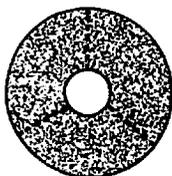
Sur notre trajet, chaque portion de tour longitude se présente comme reliant l'extrémité centrale d'un segment pointillé (méridien) à l'extrémité périphérique de l'autre segment (méridien). Il y a deux portions de longitudes qui accomplissent chacune un demi-tour, soit $1/m$ tour. Ces éléments combinatoires simples se retrouvent pour n'importe quel trajet torique et fournissent de sûrs repères pour dessiner de façon juste un trajet torique.

• Règle de tracé du trajet torique composé d'un seul lacet

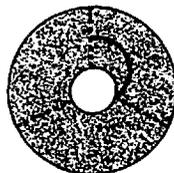
Pour effectuer correctement le tracé du trajet à partir de deux nombres m et l , nous posons d'abord les m méridiens (en pointillé car le trait s'inscrit sur la partie non visible du tore), puis nous traçons les longitudes par portions. De l'extrémité centrale d'un

segment pointillé (figurant un méridien), à l'extrémité périphérique d'un autre segment (méridien), nous traçons une portion de longitude égale à $1/m$ tours ; puis de l'extrémité centrale du segment (méridien) atteint nous répétons la même opération et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les extrémités des segments (méridiens) soient touchées par une portion de longitude. Nous tracerons donc m portions de longitudes de $1/m$ tours. Toutes les portions de longitude ont la même courbure, afin qu'elles ne se croisent pas à la surface du tore qui imite la lustrine.

6) *Trois tours méridiens et deux tours longitudes*
 $m = 3$ et $l = 2$. Nous tracerons les 2 longitudes par 3 portions de $2/3$ de tour.

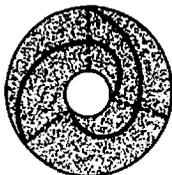
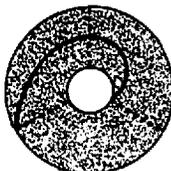


Nous dessinons les trois méridiens.

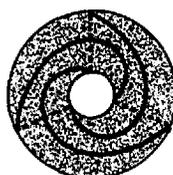


Pour tracer la portion de deux tiers de longitude nous amorçons le tracé en effectuant un tiers de tour (qui ne doit donc pas aboutir à une extrémité de segment).

Puis nous le complétons d'un second tiers pour atteindre l'extrémité d'un segment (méridien).



Nous traçons la seconde portion de longitude,



puis la troisième portion qui boucle le trajet.

Fig. 29

Nous pouvons vérifier que notre trajet peut être parcouru sans lever le crayon, c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'une seule courbe fermée, correspondant au plongement d'un nœud à la surface du tore.

Dans les exemples suivants, nous ne décomposons plus les portions de tours longitudes.

7) *Trois tours méridiens et quatre tours longitudes*

$m = 3$ et $l = 4$ sont premiers entre eux. Nous tracerons les 4 longitudes en 3 portions de $4/3$ tour chacune.



Nous traçons les trois méridiens,



la première portion de longitude,



puis la seconde,

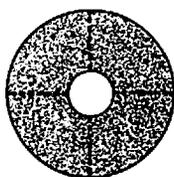


enfin la troisième qui boucle le lacet.

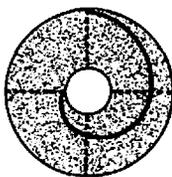
Fig. 30

8) *Quatre tours méridiens et trois tours longitudes*

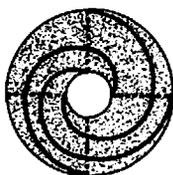
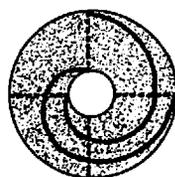
$m = 4$ et $l = 3$. Les 3 tours longitudes se tracent en 4 portions de $3/4$ tour.



Nous dessinons les quatre méridiens.



Puis nous traçons successivement les deux premières portions de longitudes,

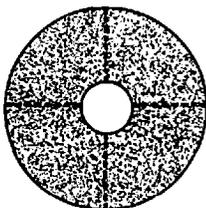


la troisième, et enfin la quatrième qui boucle le lacet torique.

Fig. 31

Donnons un dernier exemple d'un trajet composé d'un unique lacet.

9) *Quatre tours méridiens et cinq tours longitudes*



Nous dessinons les quatre méridiens.



Et donnons le trajet bouclé avec les cinq tours longitudes.

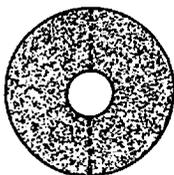
Fig. 32

Le lecteur peut éprouver la justesse de cette dernière figure, en établissant les étapes intermédiaires.

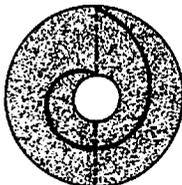
Examinons enfin ce qui se passe lorsque m et l ne sont pas premiers entre eux. Le lecteur pourra constater que nous n'obtenons pas un lacet torique, mais le plongement d'une chaîne.

10) *Deux tours méridiens et deux tours longitudes*

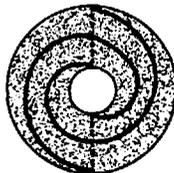
$m = 2$ et $l = 2$. Excepté 1, un nombre n'est pas premier par rapport à lui-même. Chacune des 2 portions de longitudes sera de $2/2$ tour : nous tracerons donc deux fois un tour.



Nous dessinons les deux méridiens.



Nous traçons la première portion d'un tour. Nous pouvons constater qu'elle part et aboutit au même segment, ce qui bouclie un lacet.

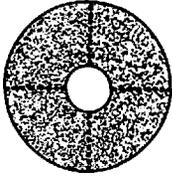


Nous traçons la seconde portion qui se boucle en un lacet avec le second méridien. Il y a donc deux lacets et non pas un lacet torique.

Fig. 33

11) *Quatre tours méridiens et deux tours longitudes*

$m = 4$ et $l = 2$ ne sont pas premiers entre eux. Nous tracerons 4 portions de longitudes de $2/4$ tour. Nous dessinerons donc quatre fois un demi-tour.



Les quatre méridiens sont tracés.



Les deux premières portions, soit un tour longitude, bouclent un lacet.



De même, les deux dernières portions. Il y a deux lacets.

Fig. 34

3. Les multi-tores

a₁ - Définition

Les multi-tores sont des composés, selon nos principes de montages (voir chap. II) de tores simples, véritables mouchoirs de linon. Un n -tore, soit un composé de n tores, présente n trous toriques ; il est de genre n . Mais les trous autour de chaque tore, que nous signalions à propos du tore simple comme oubliés, se composent pour ne faire qu'un trou autour du multi-tore. Le groupe fondamental de l'espace ambiant du multi-tore comprend n générateurs, correspondant au nombre de trous toriques et au genre de l'étoffe, et un élément neutre.

Comme pour le tore, nous utilisons plusieurs présentations des multi-tores.

a₂ - Présentation des multi-tores

• *Présentation comme une composition d'anneaux.* Voici le double tore (dit aussi 2-tore) et le triple tore (dit 3-tore) présentés comme une composition de tores simples, eux-mêmes présentés comme des anneaux. Du point de vue du groupe fondamental extrinsèque, ils ont respectivement deux plus un trous, pour le double tore, et trois plus un trous, pour le triple tore.

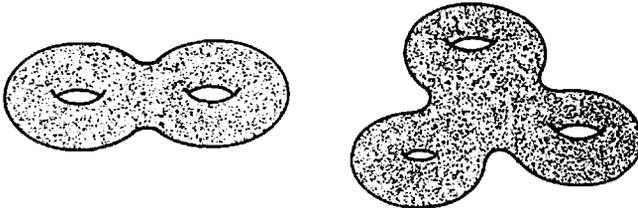
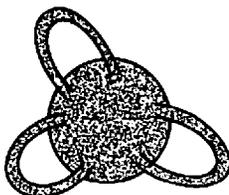


Fig. 35

• *Sphère à anses*. Nous présenterons aussi les multi-tores en sphères à anses pour lesquelles le genre correspond au nombre d'anses. A ne pas oublier le trou qui est autour, le nombre de trous extrinsèques est égal au nombre d'anses plus un.

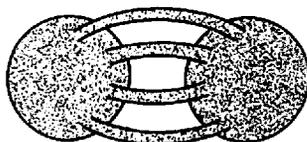


Le triple tore est une sphère à trois anses.

Fig. 36

• *2-sphère à tubes*. Un n -tore est une sphère à n anses que nous pouvons déformer en deux sphères reliées par $(n + 1)$ tubes : c'est la présentation en 2-sphère à $(n + 1)$ tubes.

La 2-sphère à n tubes est de genre $(n - 1)$, donc le nombre de trous extrinsèques, c'est le nombre de tubes.



Le 3-tore est une 2-sphère à 4 tubes.

Fig. 37

• *Multi-sphère à tubes*. Chaque tube peut donner lieu à une sphère et deux tubes. Le nombre de sphères dans la présentation d'un multi-tore peut se démultiplier. Inversement, ces diverses constructions peuvent se réduire à une seule sphère à anses.

• *2-sphère à tubes avec des anses*. Une propriété non triviale des multi-tores consiste en leur séparation en deux parties symétriques quelle que soit la parité de leur genre.

Nous nous proposons ici de montrer cette séparation des multi-tores quelconques en deux parties symétriques, à l'occasion de deux exemples particuliers. Il s'agit de changer la présentation d'un multi-tore, quelle que soit la situation donnée, et de le présenter en 2-sphère à tubes avec des anses.

La symétrie sera due à l'identité du nombre d'anses portées par chacune des deux sphères.

Pour cela nous partons d'une présentation en sphères à tubes. Deux cas s'offrent à nous, suivant la parité de ces multi-tores, c'est-à-dire la parité de leur genre (voir chap. III).

1) *Les multi-tores pairs, soit les $2n$ -tores, se présentent en 2-sphères à $2n+1$ tubes.*

Ainsi un 4-tore est une 2-sphère à 5 tubes.

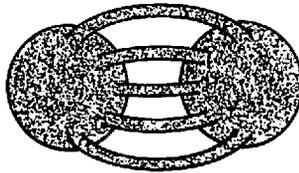
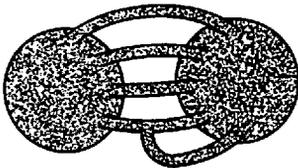
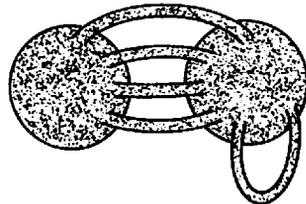


Fig. 38

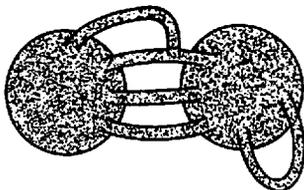
Nous pouvons déplacer le pied d'un tube le long d'un autre tube et ainsi l'amener à former une anse, comme un manchon de cellular, sur l'une des deux sphères (c'est-à-dire un tube dont les deux pieds sont sur la même sphère).



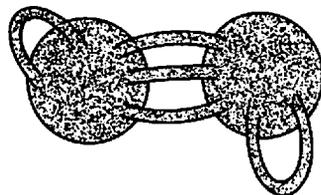
Nous déplaçons le tube du bas le long d'un autre.



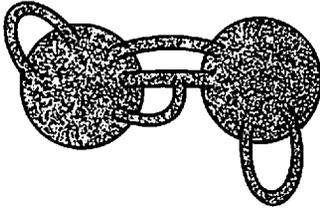
Ce tube est maintenant devenu une anse sur la sphère de droite.



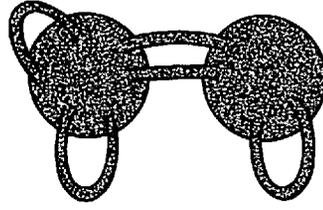
Nous répétons cette opération avec un autre tube pour créer une anse sur la sphère de gauche et rétablir la symétrie de la figure.



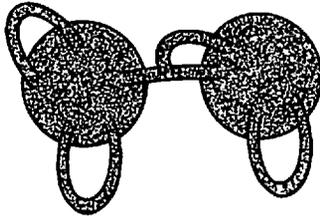
Après être passé le long d'un des tubes du haut, nous avons bien une nouvelle anse à gauche. Il reste trois tubes entre les deux sphères.



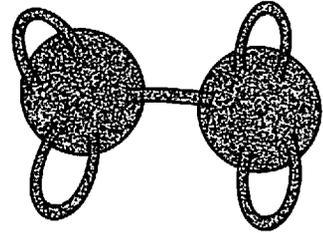
Ici, c'est de nouveau en faisant parcourir l'un des trois tubes le long d'un des deux autres



que nous obtenons une autre anse sur la sphère de gauche.



Il ne nous reste plus qu'à faire de même avec symétrie pour l'un des deux derniers tubes.

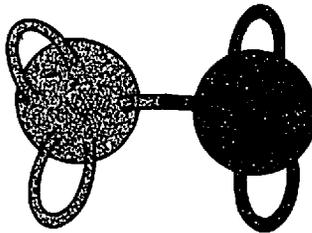


Nous avons alors, sur chacune des deux sphères, deux anses et il nous reste un tube reliant les deux sphères.

Fig. 39

Nous avons ainsi obtenu la présentation symétrique du quadruple tore en deux sphères, reliées par un tube, à deux anses chacune.

Pour un quelconque multi-tore pair ($2n$ -tore), nous pouvons obtenir une présentation symétrique en deux sphères, reliées par un tube, à n anses chacune. C'est à couper ce tube que nous déconnectons ces deux sphères à anses en deux morceaux symétriques, c'est-à-dire en deux sphères trouées à n anses.

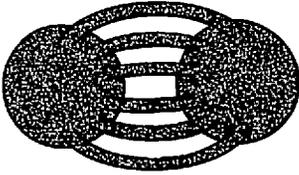


Le 4-tore avec sa coupure.

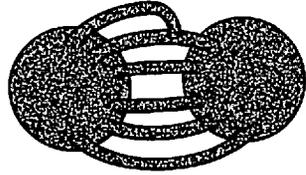
Fig. 40

2) Les multi-tores impairs, soit les $(2n+1)$ -tores, sont des 2-sphères à $2n'$ tubes, ($n' = n + 1$).

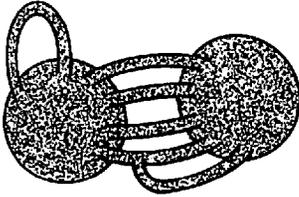
Le 5-tore est ainsi une 2-sphère à 6 tubes. Ces tubes délimitent les trous toriques entre les sphères.



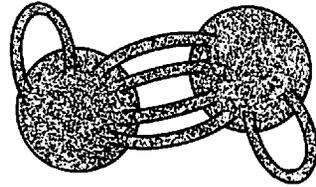
Comme dans le cas précédent, il s'agit de changer la présentation des tubes



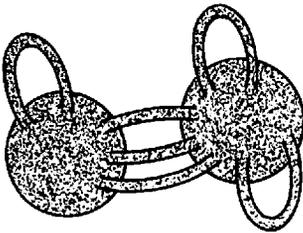
pour les amener à former des anses sur une sphère.



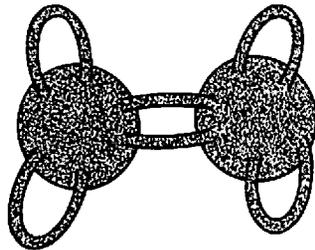
Après avoir obtenu une anse sur la sphère de gauche, nous déplaçons un tube le long de n'importe quel autre.



Nous avons en symétrie une anse sur la sphère de droite.



Nous réitérons ce changement de présentation avec un des quatre tubes,



puis avec un autre. Ce qui nous donne cette présentation du 6-tore comme deux sphères, reliées par deux tubes, à deux anses chacune.

Fig. 41

Nous pourrions très bien ne pas nous arrêter à cette étape, puisqu'il reste encore deux tubes entre les sphères à anses, et ainsi poursuivre le changement de présentation d'un tube en une anse.

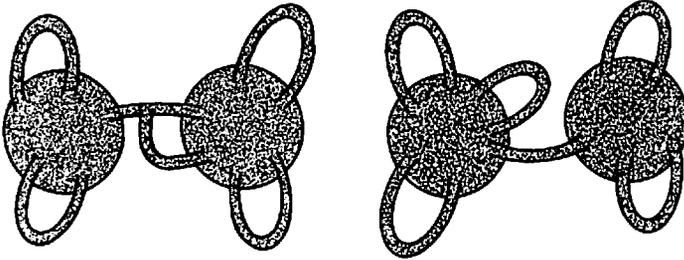


Fig. 42

Nous obtenons alors une sphère à trois anses reliée par un tube à une sphère à deux anses. Le 5-tore est alors réparti en un 3-tore et un 2-tore, ce qui ne permet pas une séparation symétrique, tout comme une déchirure de nylon.

La présentation symétrique des multi-tores impairs, $(2n+1)$ -tores, soit les 2-sphères à $2n'$ tubes, se répartit en deux sphères, reliées par deux tubes, à $n' - 1$ anses chacune, $n' - 1 = n$.

Pour effectuer la coupure qui fait bord, nous coupons chacun des deux tubes selon un méridien, ce qui sépare bien en deux sphères à $n' - 1$ anses et deux trous le multi-tore impair.

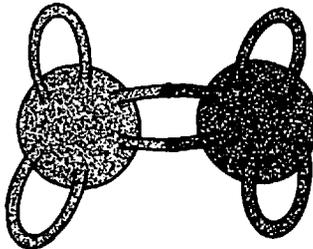


Fig. 43

a₃ - Les trajets multi-toriques

Les trajets multi-toriques sont les trajets qui consistent dans l'étoffe des multi-tores. L'équivalence des trajets les réduit à un petit nombre. Elle est liée au genre des surfaces. Par la coupure de l'étoffe selon ces trajets, nous obtenons des portions dont le genre détermine l'équivalence entre les trajets. Celle-ci est à rapprocher de la théorie de l'homologie (voir chap. III), dont les

mathématiciens connaissent bien la structure algébrique. Dans cette théorie, l'équivalence des trajets homologues s'établit en ne prenant en compte que des morceaux de sphère (genre zéro). Nous nous proposons d'étendre cette méthode.

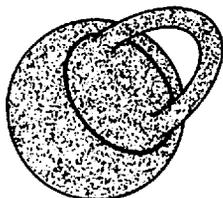
Pierre Soury étudie cette question en termes de graphes. Nous montrons plus loin la dualité entre graphes et trajets multi-toriques, ce qui est encore un point de vue intrinsèque, sensiblement différent de celui qui se limite à la structure algébrique de l'homologie.

La lecture extrinsèque des trajets multi-toriques, qui se complique lorsque plusieurs lacets consistent ensemble dans la même étoffe, est assez peu étudiée ; sa construction permettrait de définir un langage pour la topologie des nœuds, puisque nous avons établi une correspondance entre chaque nœud et deux étoffes multi-toriques. Ce sont les surfaces feintes, au sens de Lacan (chap. VII), de nos surfaces d'empan (chap. I). Nous pensons qu'il est nécessaire d'étudier les effets des coupures selon ces trajets sur les multi-tores, en raison de leur lien avec la question de l'effacement du nœud dans l'intrinsèque. Ces effets, c'est-à-dire le nombre des morceaux obtenus, leur genre et le nombre de trous qu'ils comportent, sont présentés dans le chapitre suivant.

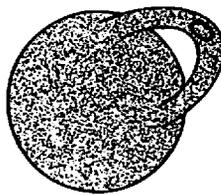
Nous ne présentons ici que quelques exemples de trajets toriques et multi-toriques, en nous limitant à un, deux et trois lacets sur le tore simple, le double tore et le triple tore. Nous utilisons deux présentations de ces étoffes, soit comme un anneau ou une composition d'anneaux, soit comme une sphère à anses.

1) *Un lacet sur le simple tore*

Nous avons déjà vu qu'il y a trois types de lacets, trivial (réductible), méridien et longitude. Nous donnons deux présentations du premier sur la sphère à anse :



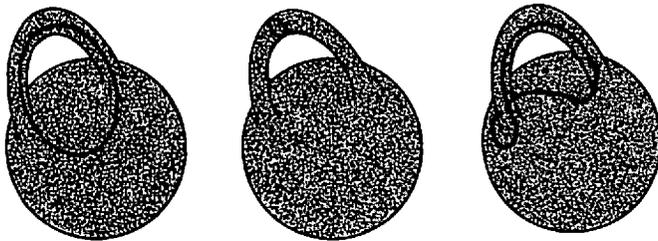
Sur la partie sphérique.



Sur l'anse.

Fig. 44

Puis le lacet longitude et le lacet méridien, que nous pouvons composer entre eux pour former un nouveau trajet.



Un longitude, un méridien et le composé des deux.

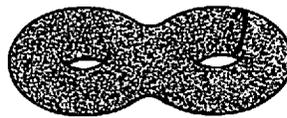
Fig. 45

2) Un lacet sur le double tore

Voici deux lacets méridiens non équivalents.



Un méridien qui passe entre les deux anneaux.



Un méridien qui ne porte que sur l'un des deux anneaux.

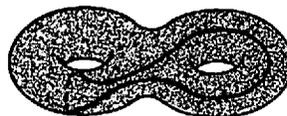
Fig. 46

Nous montrerons cette non-équivalence dans le chapitre suivant. D'ores et déjà, le lecteur peut se rendre compte qu'en effectuant la coupure selon ces lacets l'une séparerait la surface en deux morceaux, l'autre la laisserait d'un seul tenant.

Voici deux autres lacets sur le double tore.



Un longitude porté par un seul des deux anneaux.



Le composé d'un méridien, porté par l'anneau de gauche, et d'un longitude porté par l'anneau de droite.

Fig. 47

3) Un lacet sur le triple tore

Nous présentons le triple tore en une sphère à trois anses. L'équivalence des deux premiers trajets est aisée à montrer, comme sur une souple étoffe de mousseline. Par déplacement continu sur la partie sphérique, l'un se transforme en l'autre.

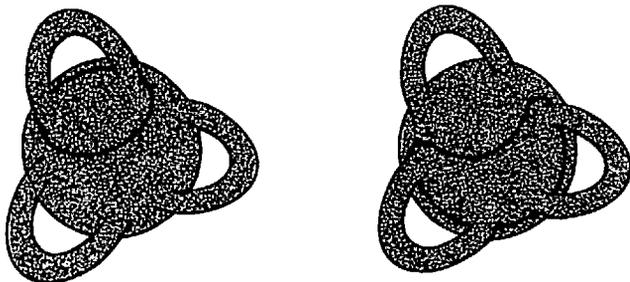


Fig. 48

Voici deux autres trajets distincts.

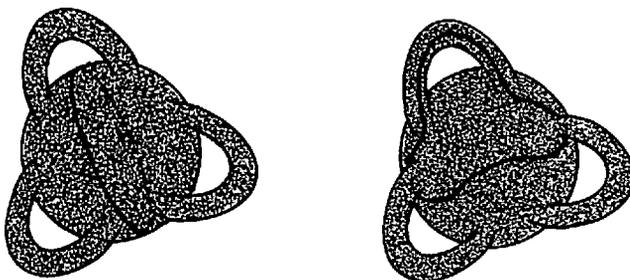
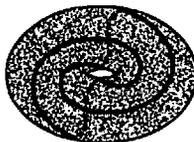


Fig. 49

Nous montrons maintenant quelques exemples où plusieurs lacets consistent ensemble dans l'étoffe.

4) Deux lacets sur le simple tore

Nous redonnons ici, dans une présentation légèrement différente, le cas de deux lacets consistant ensemble, chacun accomplissant un tour longitude et un tour méridien. Il s'agit, dans l'extrinsèque, de l'enlacement.

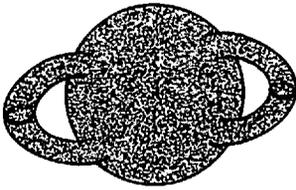


L'enlacement dans l'étoffe du tore.

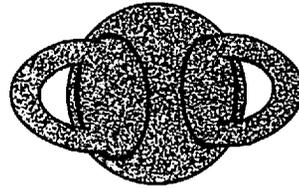
Fig. 50

5) Deux lacets sur le double tore

Nous reprenons la présentation en sphère à anses, ici deux anses.



Deux méridiens.



Deux trajets homologues.

Fig. 51

Les deux dessins suivants sont deux présentations différentes de la même chose, puisque le lacet qui entoure une anse peut être déplacé sur la partie sphérique pour venir entourer l'autre.

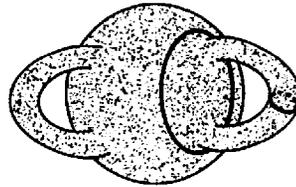
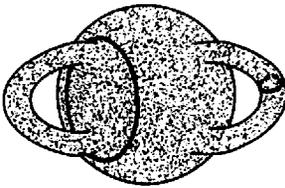


Fig. 52

Un autre exemple de deux lacets sur le double tore.

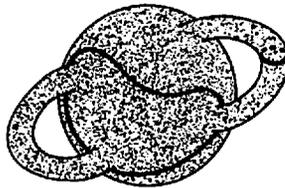


Fig. 53

Nous pouvons remarquer que le lacet posé sur la partie sphérique se ramène, par déformation continue, à un méridien sur l'anse qui en porte déjà un.

Un dernier exemple de deux lacets consistant ensemble sur le double tore. Il s'agit du nœud de Whitehead² plongé dans la surface du double tore.

2. *Essaim*, p. 119.

Nous montrerons par des dessins, dans le chapitre suivant, qu'en effectuant la coupure selon ce nœud, l'étoffe, scintillante comme un coupon de tussah, demeure d'un seul tenant.

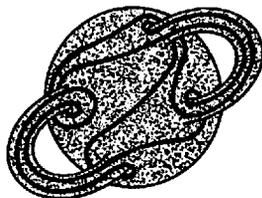
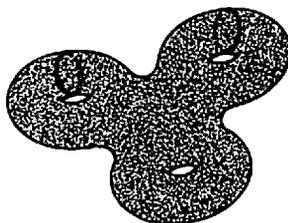


Fig. 54

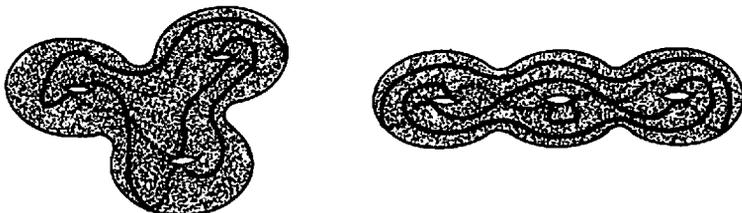
6) *Deux lacets sur le triple tore*



Deux lacets méridiens portés par deux anneaux différents.

Fig. 55

Dans les deux exemples suivants, nous pouvons remarquer qu'il ne s'agit pas de plongements de chaînes. De manière extrinsèque, le premier trajet est constitué de deux ronds posés l'un sur l'autre, le second est le faux trou³.



Deux ronds superposés et le faux trou consistant dans la surface du triple tore.

Fig. 56

3. *Essaim*, p. 128, fig. 3 ; et pp. 132-133.

7) *Trois lacets sur le double tore*

Voici la chaîne olympique, plongée⁴ dans l'étoffe du double tore.

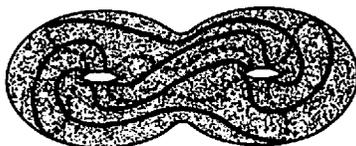


Fig. 57

8) *Trois lacets sur le triple tore*

Nous achevons cet aperçu sur les trajets multi-toriques, par le plongement du nœud borroméen dans l'étoffe d'un triple tore présenté en une sphère à trois anses.

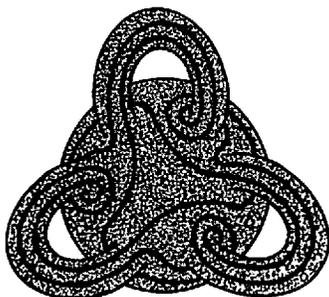


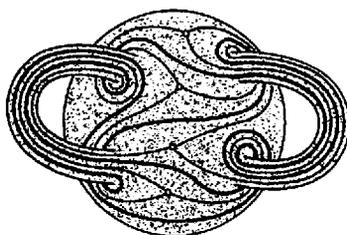
Fig. 58

C'est avec les exemples que nous venons de donner que nous effectuerons, au chapitre VI, les coupures, et montrerons les transformations qu'elles entraînent.

a₄ - *Complémentarité entre les trajets multi-toriques et les graphes multi-toriques*

Considérons un nœud plongé (un trajet multi-torique) dans l'étoffe d'une sphère à anse. L'étoffe découpée selon ce nœud est faite de bandes qui se raccordent en des carrefours (voir chap. VI). Nous y traçons un graphe en plaçant un sommet à chaque carrefour et en reliant les sommets entre eux par des arêtes qui parcourent les bandes.

4. *Essaim*, p. 129, fig. 5.



Le nœud de Whitehead et son graphe.

Fig. 59

Ne considérons que le graphe.

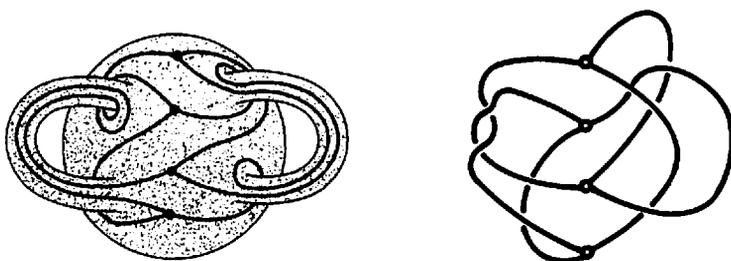


Fig. 60

Prenons un voisinage du graphe. Les lignes du voisinage découpent l'étoffe en deux morceaux non connexes, distingués sur le dessin par deux trames différentes, comme une grande robe en taffetas flambé qui crierait du froissement de ses plis.



Fig. 61

Nous rétractons le voisinage du graphe en l'écartant du graphe. Nous obtenons un voisinage du nœud de départ. Cette opération met en évidence la dualité entre trajets multi-toriques (nœuds plongés) et graphes multi-toriques.



Fig. 62

Nous pouvons effectuer la même monstration dans un cas trivial, à partir d'un lacet méridien sur le tore. Le graphe de la surface découpée suivant ce trajet est un méridien muni d'un sommet.

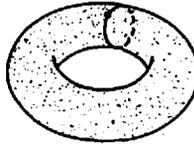


Fig. 63

Nous traçons un voisinage du méridien que nous rétractons en un voisinage du graphe.

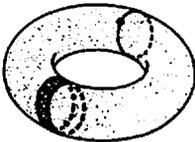


Fig. 64

a5 - Parité de la coupure supplémentaire à ajouter à des trajets multi-toriques pour disjoindre l'étoffe en deux parties symétriques

Nous considérons maintenant un problème spécifique de la symétrie des multi-tores dans le cas où un ensemble de ronds est plongé dans l'étoffe, de telle manière qu'ils puissent se répartir chacun sur un tube différent dans la présentation en 2-sphère à anses. Nous voulons effectuer des coupures selon ces ronds et séparer l'étoffe en deux parts symétriques. Ils donnent déjà des composants du bord de chacune des parties symétriques en lesquelles nous cherchons à séparer un multi-tore. La caractérisation de ces ronds parmi l'ensemble des trajets toriques est un problème plus fin dans le groupe d'homologie des multi-tores que nous ne traiterons pas ici.

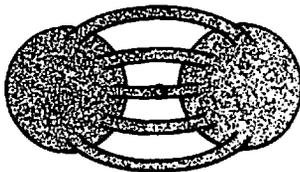
est un problème plus fin dans le groupe d'homologie des multi-tores que nous ne traiterons pas ici.

Pour un multi-tore portant un certain nombre de tels ronds, combien faut-il ajouter de ronds de coupure, et comment, pour le disjointre en deux morceaux semblables ? Nous donnons le résultat général.

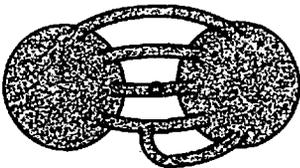
Le nombre de coupure supplémentaire a la même parité que la somme, augmentée de un, du genre du multi-tore et du nombre de ronds. Leur somme est paire ou impaire. Si la somme est paire, le nombre de ronds de coupure sera un, si la somme est impaire, il faudra une coupure faite de deux ronds.

Nous montrons, pour chacun des cas où la parité de ces deux nombres est différente, des configurations précises. Quatre cas sont possibles et, à partir de nos exemples, nous montrerons l'amorce d'une solution générale.

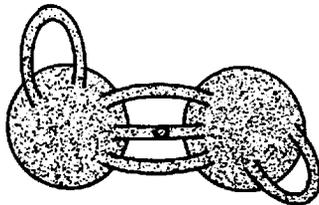
1) *Un rond posé sur le 4-tore* (nombre de rond impair, multi-tore pair, soit $2n$ -tore présenté en une 2-sphère à $2n + 1$ tubes).



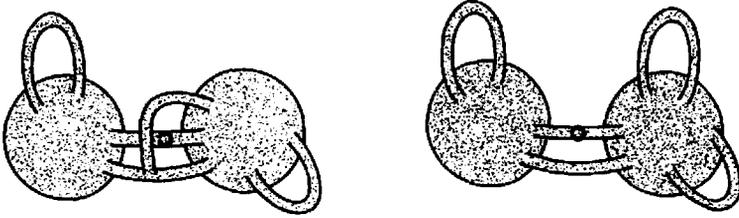
Le rond intrinsèque (sans nouage) posé sur l'un des tubes.



Nous faisons circuler un tube le long d'un autre tube pour former une anse sur une sphère.



Nous effectuons la même opération sur un autre tube et obtenons une présentation symétrique.



Nous pouvons encore déplacer l'un des deux tubes ne portant pas le rond. Nous obtenons alors cette figure, où l'une des sphères porte deux anses et l'autre une seule.

Fig. 65

Nous pourrions obtenir une présentation symétrique en transformant un tube en une anse, mais ce changement de présentation emporterait le rond sur une anse. Or celui-ci doit rester sur un tube pour être un composant du bord de la coupure séparant l'étoffe en deux parties symétriques.

La présentation symétrique du 4-tore avec un rond sur un tube est donc la suivante : deux sphères reliées par les trois tubes, dont l'un porte le rond de départ, et chacune a une anse. A y ajouter deux ronds supplémentaires, ces coupures forment bord et séparent la surface en deux morceaux symétriques, comme apparaîtrait une pièce de piqué, soit deux sphères à une anse (et trois trous si nous effectuons la coupure).

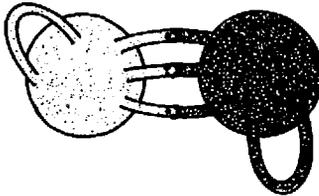


Fig. 66

Pour un multi-tore pair portant un nombre impair de ronds, il faut ajouter deux ronds de coupure pour le disjoindre en deux parties symétriques.

2) *Deux ronds posés sur le 4-tore* (nombre de rond pair, multi-tore pair soit $2n$ -tore présenté en 2-sphère à $2n + 1$ tubes).

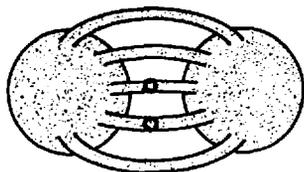
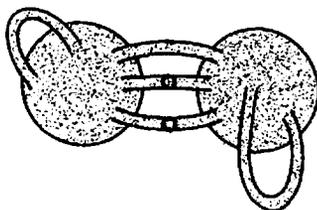
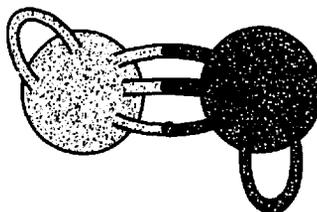


Fig. 67

Les deux ronds encombrent deux des tubes. Il reste entre les deux sphères trois tubes utilisables pour le changement de présentation. Deux d'entre eux vont devenir des anses, le troisième tube étant, quant à lui, utilisé pour le déplacement des deux précédents.



Nous obtenons alors cette présentation symétrique en deux sphères à une anse et trois tubes.

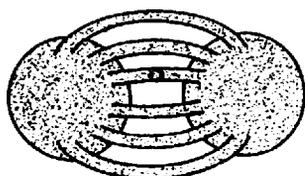


En ajoutant un rond en plus, ces trois ronds forment un bord qui sépare la surface en deux sphères à une anse (plus trois trous si nous effectuons la coupure).

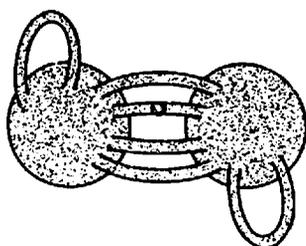
Fig. 68

Pour un multi-tore pair portant un nombre pair de ronds, il faut ajouter un rond de coupure pour le disjointre en deux morceaux symétriques.

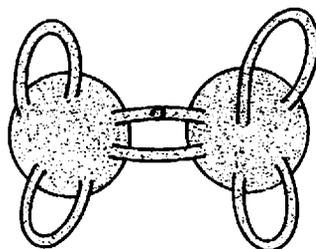
3) *Un rond posé sur le 5-tore* (nombre de rond impair, multi-tore impair soit un $(2n+1)$ -tore présenté en une 2-sphère à $2n'$ tubes).



Un rond intrinsèque est placé sur l'un des tubes.



En déplaçant deux des tubes, nous obtenons une première présentation symétrique. Celle-ci n'est pas la plus simple pour notre problème,



puisque le changement de présentation peut se poursuivre jusqu'à donner deux sphères à deux anses et deux tubes.

Fig. 69

Sur cette présentation symétrique de deux sphères reliées par deux tubes, dont l'un porte un rond, à deux anses chacune, il faut ajouter un seul rond pour que l'étoffe se sépare en deux.

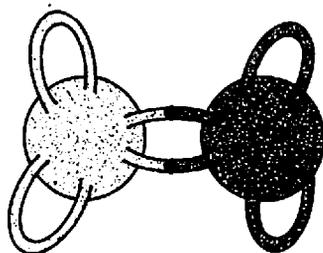


Fig. 70

Pour un multi-tore impair, portant un nombre impair de ronds, il faut ajouter un rond de coupure pour le disjointre en deux parties symétriques.

4) *Deux ronds posés sur le 5-tore* (nombre de rond pair, multi-tore impair soit un $(2n+1)$ -tore présenté en une 2-sphère à $2n'$ tubes).

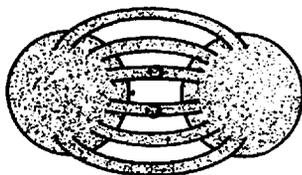
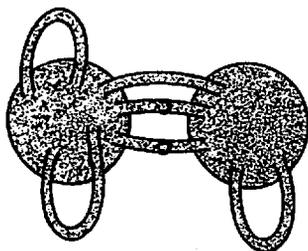
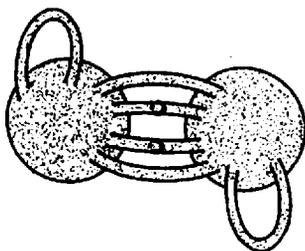


Fig. 71

Nous plaçons chacun des deux ronds sur un des tubes.



Nous déplaçons deux tubes pour obtenir cette présentation symétrique en deux sphères à une anse et quatre tubes.

Si nous déplaçons un troisième tube, nous obtenons cette présentation dissymétrique que nous ne pouvons transformer. Le dernier tube sans rond ne peut circuler du fait de la présence des ronds sur les autres.

Fig. 72

Revenons donc à l'étape précédente, sur laquelle il faut ajouter deux ronds de coupe pour que l'étoffe, telle une voile de faille, se sépare en deux parties symétriques.

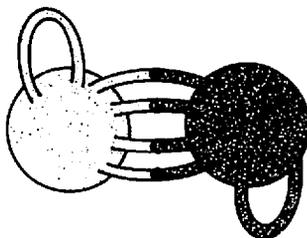


Fig. 73

Pour un multi-tore impair, portant un nombre pair de ronds, il faut ajouter une coupure paire pour le disjointre en deux moitiés symétriques.

5) La relation entre genre, ronds et coupure

Convenons de nommer G le genre d'un multi-tore quelconque, R le nombre de ronds consistant dans son étoffe, et N le nombre minimal de coupure, c'est-à-dire de ronds nécessaires à ajouter pour disjoindre l'étoffe en deux morceaux symétriques.

Prenons un multi-tore de genre G , soit une 2-sphère à $G+1$ tubes, quelconque. Considérons un nombre R de tubes porteurs d'un rond, et un nombre L de tubes libres. Le nombre total de tubes ($G+1$) est égal à la somme du nombre de tubes porteurs d'un rond (R) et du nombre de tubes libres (L) :

$$G + 1 = R + L, \text{ soit } L = G - R + 1.$$

D'après la définition du genre d'une étoffe, si R égale $G+1$, l'étoffe est nécessairement scindée en deux parties : elles seront ici symétriques puisque nous ne considérons que les ronds, en nombre R , portés par les tubes dans la présentation en une 2-sphère à tubes. Donc notre problème ne se pose que dans le cas où R est inférieur ou égal à $G+1$.

Deux cas peuvent se produire qu'il nous faut distinguer dès l'abord. Ce sont les cas où R est égal à $G+1$ et ceux où R est différent de $G+1$.

- Si $R = G + 1$, alors $L = 0$, il n'y a pas de tubes libres de rond, et dans ce cas le nombre cherché N égal 0.

La 2-sphère à tubes est séparée en deux sphères à R trous, comme nous le montrerons au prochain chapitre.

- Si $R \neq G + 1$, sachant que nous sommes plus précisément dans cette étude sous la condition où $R < G + 1$, alors, puisqu'il s'agit de nombre entier, $R \leq G$. Dans ces cas une étude du nombre de coupure supplémentaire s'impose.

• Dans le cas où $R \leq G$.

Pour disjoindre l'étoffe, de manière symétrique, sans utiliser le changement de présentation des tubes en anses, montré précédemment, il faudrait ajouter un nombre L de ronds de coupure.

Au cours de ce changement de présentation des tubes en anses, nous répartissons chacun des éléments de chacune des paires de tubes libres grâce à un troisième tube libre, les transformant en des anses réparties sur chacune des deux sphères. Nous traitons les tubes libres par paires pour répondre à la condition de symétrie.

Le nombre N de coupure minimal, auquel nous nous intéressons, a nécessairement la même parité que le nombre L ,

puisque c'est par paires que nous transformons les tubes libres en anses réparties sur chacune des deux sphères de manière symétrique.

Pour établir le résultat minimal que représente le nombre N , il suffit de donner son importance au fait topologique qui consiste à répartir les deux tubes de chaque paire par le moyen d'un troisième tube libre. Il s'en déduit que le nombre de tubes libres restant entre les deux sphères ne peut pas être inférieur à 1. Ainsi, dans le cas où L est pair, le nombre N sera égal à 2 ; et dans le cas où L est impair, le nombre N sera égal à 1.

D'après notre formule $G = R + L - 1$, nous pouvons écrire :

$$L = G - R + 1.$$

Le résultat dépend de la parité de ce nombre $G - R + 1$, cette condition peut s'écrire en arithmétique dans les termes de la congruence modulo 2.

- s'il est pair, $G - R + 1 = 0 \pmod{2}$, alors $N = 2$;
- s'il est impair, $G - R + 1 = 1 \pmod{2}$, alors $N = 1$.

Un calcul rapide d'arithmétique modulo 2, où la différence est identique à l'addition du fait de l'involution ($1 + 1 = 0$), nous permet d'écrire :

$$G - R + 1 = G + R + 1 \pmod{2},$$

et de faire passer l'unité dans l'autre membre de chacune de nos formules.

Ainsi réécrivons le résultat dans le cas où R est inférieur ou égal à G :

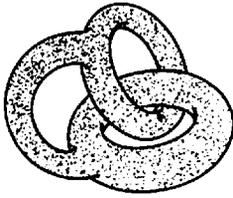
- si $G + R = 1 \pmod{2}$, soit $(G + R)$ impair, alors $N = 2$;
- si $G + R = 0 \pmod{2}$, soit $(G + R)$ pair, alors $N = 1$.

Un seul cas peut échapper à ce principe, comme nous l'avons déjà dit, il s'agit du cas où il n'y a pas de tubes libres dans l'énoncé du problème, L égale 0 car $R = G + 1$. Les ronds consistant dans l'étoffe coupent déjà tous les tubes, donc $N = 0$.

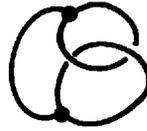
a₆ - Le nouage d'étoffes multi-toriques

Le nouage est une notion extrinsèque, c'est pourquoi nous n'abordons cette question qu'en aparté.

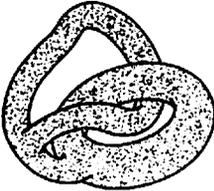
Il y a des nouages apparents qui se défont par déformation continue.



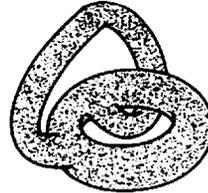
Un double tore dont les deux anneaux sont enlacés ;



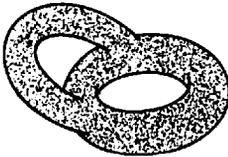
et le graphe rétracté de cette étoffe.



La base d'un tube peut glisser de manière continue le long d'une autre portion de tube afin de venir



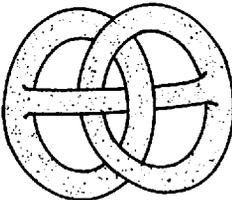
s'attacher sur l'autre anneau, puis y faire un tour méridien en passant par-dessous la figure,



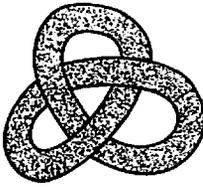
et se présenter comme un double tore non enlacé.

Fig. 74

Il est des nouages consistants. Si nous ne pouvons les défaire par déformation continue, nous ne savons pas démontrer que cela n'est effectivement pas possible.



Un double tore noué que nous ne savons pas dénouer de manière intrinsèque.



Un tore noué en trèfle dont le nœud semble bien consister.

Fig. 75

Cette situation introduit à la nécessité de l'étude des nœuds. Elle offre l'occasion d'une forte présomption qu'il y a du nœud par opposition aux nouages inconsistants, ce dont nous entreprenons l'étude à partir du Fascicule n° 3⁵.

4. Conclusion

Pour donner un exemple de ce que cette structure torique recèle, nous proposons au lecteur de se reporter à l'enquête récente consacrée au corps féminin, au travers de la documentation grecque, par Guilia Sissa [35]. La discussion passionnante qui traite de l'existence de l'hymen à laquelle elle nous convie, éclairant la Pythie à Delphes et proposant l'énigme des Danaïdes aux enfers, nous montre les bornes d'une investigation dans l'Imaginaire sans le recours à un autre ordre.

Cette étude s'en tient à la dimension du trou torique et montre la portée de la méconnaissance de la structure dans ses effets de dimensions. C'est à ne pas reporter ces questions à l'interdit maternel avec son corrélat voilé par la pudeur, que le cercle se ferme dans le tore virginal.

Entre la vierge et la veuve s'inscrit la métaphore paternelle qui répond à cette structure. En cela la névrose fait le tour indéfini du tore, virginal chez l'hystérique, que tend cette armature qu'est l'amour pour le père. L'hystéricité reste tétanisée de confondre la vérité avec le vrai, la brocatelle avec le brocart.

La fonction de la vierge, comme celle de la prostituée, est bien de métaphore constitutive de la sexualité mâle, d'être l'adresse d'un désir dirigé vers elle pour que la demande d'amour de l'homme s'adresse à sa bourgeoise (E. p. 695). La virginité est déjà élément de la métaphore de l'interdit de la mère qui s'achève dans le mi-dire de son veuvage ; un désir prend corps du cadavre car, corps mort, il manque enfin comme il convient à ce qui ne peut avoir d'être qu'à l'être tout en ne l'étant pas.

5. *Nœud*, fascicule n° 3.

Le voile porté sur la structure et la castration, comme étant cet interdit, ne situe pas la fente du même côté. Ici obstruée de l'hymen ou non, les fonctions s'inversent du fait de la structure. Nous l'avons dite renversante : elle produit une inversion accompagnée d'une élision. Dans cet essai, le terme de voile (*kalyptra*) est pourtant très joliment traité dans l'acte du dévoilement (*anakalypterion*). Nous en faisons, dans cet ouvrage, l'articulation des étoffes unilatères d'avec les étoffes ici bilatères, sous le titre de l'involution signifiante, ce par quoi nous poursuivrons notre étude à partir des effets de la coupure, de la consistance des trajets.

Chapitre VI

La grande taille des tores troués, coupés

TROU TORIQUE
TROU IMAGINABLE
FACES

1. Invariants

Le tore troué a le genre du tore par définition.

Son indicateur d'Euler-Poincaré est -1 .

Son groupe fondamental est le groupe libre à deux générateurs.

Contrairement au groupe du tore sans bord il n'est pas commutatif.

2. Le tore troué

a_1 - Présentation du tore troué

A partir d'un carré I^2 dont les côtés sont orientés.



Fig. 1

Nous identifions les côtés, en une déformation souple, comme l'on ferait d'un morceau d'étoffe de rayonne, respectant le sens des flèches portées sur le pourtour.

Une première fois par la gauche, la bande ainsi étirée se referme à droite.



Fig. 2

Une seconde fois vers le haut, après un passage au-dessus de la précédente bande, la flèche marquée se présente en regard du côté inférieur.

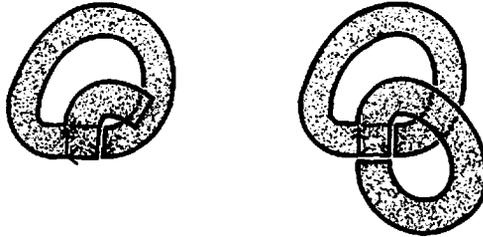


Fig. 3

Nous refermons la figure.

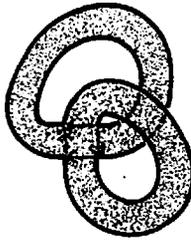


Fig. 4

Il s'agit d'un carrefour de bandes sans demi-torsion. C'est le tore troué.

Le trou unique de ce tore diffère du cas de la sphère (voir pp. 147 et 148) où il y avait trois trous ; mais il est bien fait, comme dans tous les cas, de la superposition de points, sommets du carré de départ. Ici les quatre coins se superposent pour ne donner qu'un trou.

a₂ - Monstrations du retournement du tore

Où nous montrons au passage qu'un tore troué équivaut effectivement à un carrefour de bandes sans demi-torsion.

1 - Un tore percé d'un trou imaginable

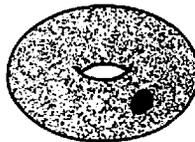


Fig. 5

Nous élargissons la taille de ce trou jusqu'à faire apparaître une bande reliant les deux cercles, extrémités d'un cylindre.

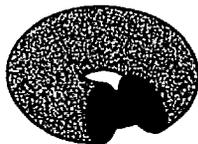


Fig. 6

Cette transformation est effectuée en ouvrant la surface vers le haut et vers le bas dans une déformation du bord du trou. Nous présentons à plat la bande ainsi mise en relief.



Fig. 7

Puis nous rétractons le cylindre de part et d'autre,



Fig. 8

jusqu'à le transformer par rétraction en une autre bande qui fait pont au-dessus de la précédente.



Fig. 9

Le tore troué est bien un carrefour de bandes sans demi-torsion.

Puis à retourner la bande d'étoffe mise à plat vers l'avant de la figure en une bande (cylindre) d'axe vertical vers l'arrière de la figure,



Fig. 10

nous pouvons la développer vers le haut et vers le bas,



Fig. 11

en redéveloppant le cylindre qui esquisse la surface du tore, jusqu'à ce que le trou se réduise en taille.



Fig. 12

Trou que nous reformons comme circulaire pour montrer sa structure sphérique,

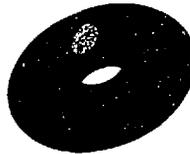


Fig. 13

sa structure de pastille ou rustine comme on voudra.

Cela est le premier mouvement qui fait trait caractéristique du retournement du tore.

Passons au second mouvement.

2 - A partir de deux anneaux enlacés,

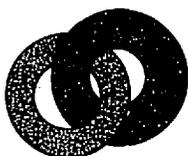


Fig. 14

nous perçons un trou dans l'un d'entre eux. Puis nous élargissons la taille du trou en question en deux temps,



Fig. 15

jusqu'à réduire le tronc de cylindre à une bande.

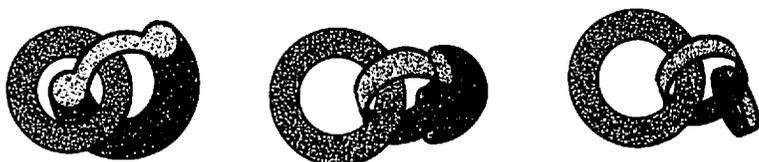


Fig. 16

A retourner cette bande d'étoffe, fût-elle de plumetis, de l'arrière à l'avant, en dessous de l'autre tore,

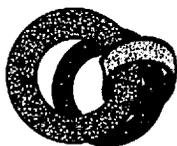


Fig. 17

nous pouvons commencer à redévelopper notre tore retourné alors.

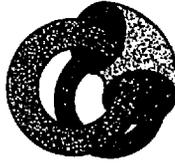


Fig. 18

Il enveloppe l'autre tore qui lui sert d'armature torique et se voit absorbé dans un intérieur,



Fig. 19

jusqu'à resserrer le trou en une singularité sphérique (réductible).

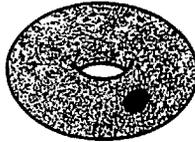


Fig. 20

C'était notre second mouvement, le deuxième mode de retournement du tore.

Passons au troisième mode.

En un troisième mouvement, il s'agit de partir de la situation finale du mouvement précédent.

3 - Un tore fait armature dans un autre tore qui l'enveloppe, percé d'un trou.

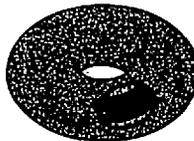


Fig. 21

Nous étendons la taille du trou,

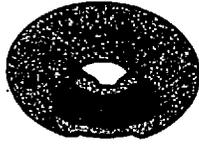


Fig. 22

jusqu'à réduire la partie cylindrique à une bande qui fait pont au-dessus de l'autre bande du carrefour.



Fig. 23

Nous rabattons cette bande du dessous vers l'arrière,



Fig. 24

et commençons à redévelopper la partie cylindrique dans une dimension transverse,



Fig. 25

jusqu'à réduire la taille du trou

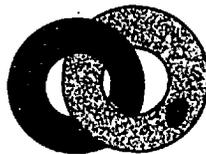


Fig. 26

à un trou sphérique qui nous laisse voir les deux tores enlacés.



Fig. 27

Et c'est à percer un trou dans le second tore que nous pouvons réeffectuer une fois de plus le retournement d'un tore jusqu'à envelopper, sur la rouge andrinople, cette fois le tore au départ enveloppant.

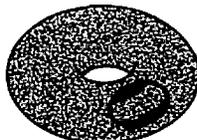


Fig. 28

Comme dans notre second mouvement, ce troisième mode de retournement est terminé (S. XXIV).

Lacan nous propose d'homologuer ces trois modes de retournement aux trois modes primaires de l'identification qu'il a isolés, à partir de Freud, de l'ensemble des identifications. Ces trois modes du primaire correspondent dans le schéma F à la division du segment Ics par le Symbolique, la réalité psychique et l'Imaginaire.

a₃ - Echange des tours méridiens et longitudes dans le retournement du tore

Au cours du retournement du tore, à le prendre en objet, c'est-à-dire d'une position extrinsèque, les tours méridiens deviennent des tours longitudes et les tours longitudes deviennent des tours méridiens.

Ainsi dans l'intrinsèque, les trajets toriques, notés par les couples de nombres (m, l) , comme dans notre chapitre V, sont identifiés aux trajets notés par les couples (l, m) .

Si nous présentons le retournement du tore, comme cela vient d'être fait grâce à deux tores enlacés dont l'un est le retourné de l'autre, nous pouvons lire les deux trajets toriques inverses l'un de l'autre, répartis sur chacun des deux tores.

Dans le cas de deux tours méridiens et d'un tour longitude, $m = 2$, $l = 1$, donné au chapitre V, figure 22, nous dessinons la situation produite par le retournement lorsque nous choisissons cette position intermédiaire.

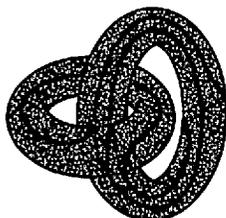


Fig. 29

Les deux tours méridiens et le tour longitude tracés sur le tore horizontal correspondent à deux longitudes et un tour méridien sur le tore dual, retourné du précédent, ici vertical.

Dans son séminaire traitant de la doctrine de l'identification freudienne, au cours duquel il développe particulièrement les trois modes de l'identification primaire, le Docteur Lacan présente la structure de la névrose, comme nous l'avons déjà dit, en termes de deux tours méridiens dits de la demande et d'un tour longitude qui s'oublie et qu'il dit être du désir. Il est remarquable que, dans *L'Etourdit* (pp. 42-43), il commente la même structure de la position renversée, que le lecteur peut suivre ici sur le deuxième tore, où il parle d'un tour méridien de la demande et de deux tours longitudes du désir. Dans cette situation, les tours de la demande sont bien nécessairement impairs pour que se fasse la bande de Moëbius, comme nous le disons dans notre chapitre VII.

Il est extraordinaire de constater ici la difficulté et l'inertie, pour ne pas dire la résistance s'il y a lecture véritable, dans l'avancée du discours analytique, puisque les lectures les plus récentes de Lacan par ceux qui étaient déjà des auditeurs de son séminaire ne se sont pas encore aperçues de ce renversement. Car ils ne font état, dans leurs commentaires de cette structure quand ils s'y aventurent, et ils ont raison de s'y aventurer, que de sa première occurrence, sans jamais aller jusqu'à commenter le passage de *L'Etourdit* que nous citons.

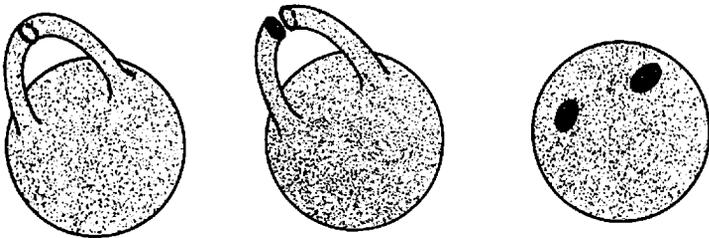
Est-ce que ce qui les effraye ou les arrête ressemble à ce qui serait une contradiction de Lacan, qui dit deux fois la même chose de manières contraires en apparence, alors que pour nous il se place dans ce non point de vue d'où les deux peuvent se dire ?

3. Le tore coupé

a₁ - Coupures selon les trajets toriques

Pour décider des équivalences intrinsèques entre les trajets toriques, nous étudions le genre et le nombre de trous des morceaux obtenus par la coupure effectuée selon ces trajets. Nous passons de l'extrinsèque à l'intrinsèque grâce aux trois opérations définies au premier chapitre. Nous pouvons par-là dire dans l'intrinsèque de l'étoffe à quel plongement simple de ronds correspond un nœud ou une chaîne multi-torique, c'est-à-dire un nœud ou une chaîne plongé(e) dans l'étoffe d'un multi-tore. Du fait de cette équivalence il n'y a pas de nœud de manière intrinsèque. Le nœud ou la chaîne s'est évanoui(e).

1) *Coupure d'une sphère à anse selon un méridien*



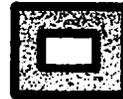
Sur une anse, nous traçons une coupure méridienne.

La coupure effectuée transforme l'étoffe fermée en une étoffe à bord (il y a deux composants de bord).

Nous rétractons les deux parts de l'anse coupée, jusqu'à présenter la sphère à deux trous.



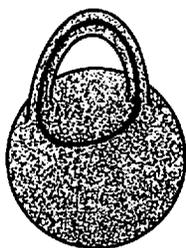
En poursuivant ce mouvement, nous élargissons les trous jusqu'à cette présentation en une bande bilatère.



Il s'agit bien d'un disque troué, dont nous donnons ici le schéma de Griffiths.

Fig. 30

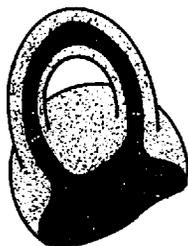
2) Coupure d'une sphère à anse selon un longitude



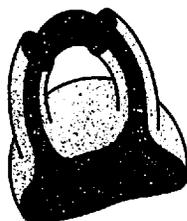
Nous traçons une coupure longitudinale,



qui, effectuée, donne une étoffe ayant deux composants de bord. Une ligne de pli apparaît aux pieds de l'anse.



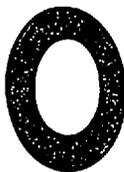
Nous allongeons les deux composants de bord, pour élargir le trou et réduire la partie sphérique,



puis l'anse qui commence à se rétracter en une bande sur sa partie médiane.



L'anse devient une bande dont les deux plis s'annulent.



En poursuivant la réduction de la calotte sphérique, nous obtenons un disque troué.

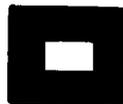
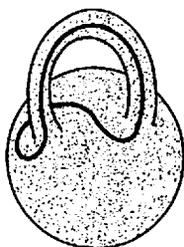
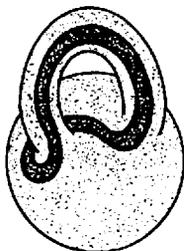


Fig. 31

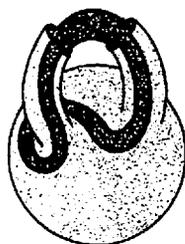
3) *Coupure d'une sphère à anse selon un trajet composé d'un longitude et d'un méridien*



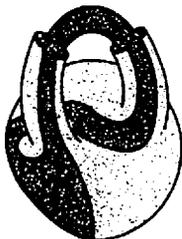
Nous traçons le trajet de la coupure.



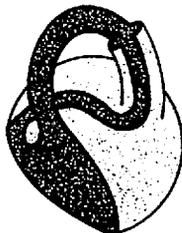
Nous effectuons celle-ci, nous ouvrons l'étoffe, deux lignes de plis deviennent visibles, dans l'ouverture, aux pieds de l'anse.



Nous commençons à réduire l'anse par le haut.



En allongeant un composant de bord, nous réduisons la partie sphérique,



puis l'anse, dont la partie gauche devient bande,



avec un pli se dégageant de ce qui était le pied de l'anse.



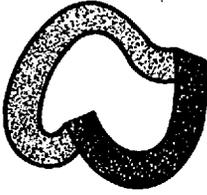
En poursuivant le mouvement, la transformation de l'anse s'achève en bande avec un second pli au niveau de ce qui était le second pied de l'anse.



Un autre pli se forme de la réduction de la calotte sphérique, vers le bas,



puis un autre encore, vers le haut : la sphère est alors une bande dont les deux plis s'annulent. Le second pli de l'anse devenue bande se trouve dégage.



Nous obtenons donc une bande à deux plis qui s'éliminent dans l'intrinsèque par l'opération II,



pour donner une bande sans pli, soit un disque troué (ici en schéma de Griffiths).

Fig. 32

Les trois coupures que nous avons effectuées sur le tore présenté en sphère à anse, comme manchon de perse, produisent toutes, de manière intrinsèque, une sphère à deux trous. L'équivalence du résultat des deux premières, selon d'abord un méridien, puis selon un longitude, n'est pas pour nous surprendre, puisque nous avons montré, par le retournement du tore, l'équivalence des deux trajets générateurs du groupe fondamental de l'étoffe torique (le méridien et le longitude). Que le résultat de la dernière coupure soit le même est par contre plus inattendu, puisque nous avons coupé selon un trajet composé d'un méridien et d'un longitude, soit des deux précédents. Du point de vue intrinsèque du groupe fondamental, un tel trajet composé n'est pas équivalent à l'un ou l'autre de ses composants. Du point de vue intrinsèque aussi, de l'effet des coupures, il y a équivalence des trois coupures proposées à la simple coupure méridienne du tore,

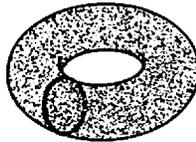
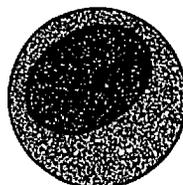
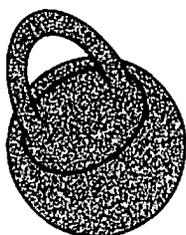


Fig. 33

puisqu'elles donnent toutes, comme celle-ci, une sphère deux fois trouée.

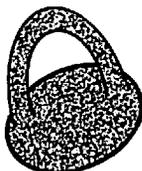
Il s'agit donc, dans cette étude de l'effet des coupures, d'un autre intrinsèque qui quotiente plus fortement que celui du groupe fondamental, c'est-à-dire qui réduit un plus grand nombre d'objets (trajets, coupures), apparemment différents, à un même objet.

4) *Trajet qui enserre les deux pieds d'une anse*



Si nous découpons une sphère à anse selon un trajet entourant les deux pieds de celle-ci,

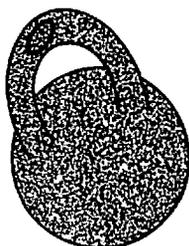
l'étoffe se disjoint en une sphère trouée, d'une part,



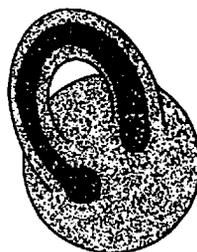
et, d'autre part, en un tore troué dont nous redonnons le schéma de Griffiths.

Fig. 34

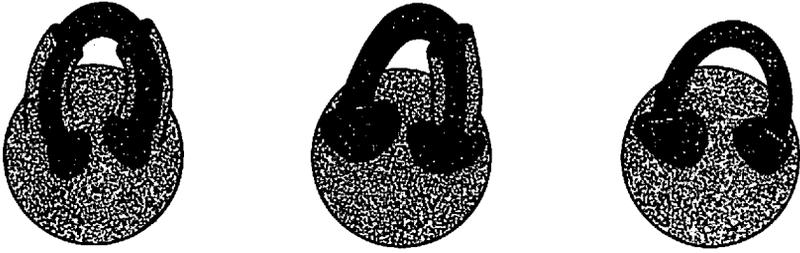
5) *Coupure réductible sur une anse d'une sphère à anse*



Une coupure réductible disjoint un disque de l'étoffe.



Nous étudions son effet sur l'autre morceau en élargissant le bord produit, comme dans les exemples précédents. Remarquons les lignes de plis qui apparaissent, dans l'ouverture, aux pieds de l'anse.



Nous réduisons d'abord l'anse, qui devient une bande avec deux plis apparents l'articulant à la partie sphérique.



En poursuivant le mouvement sur la partie gauche de la sphère, nous dégageons le pli de la bande.



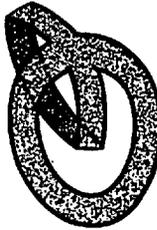
La même opération, à droite, dégage l'autre pli de la bande, tandis que la partie sphérique se réduit



à une autre bande munie de deux plis, qui sont ce qui reste de la ligne de pli de la sphère.



Nous rabattons la première bande, dont les deux plis s'annulent,



et nous déplaçons la seconde pour mieux la montrer comme pont sur la précédente. Les 2 derniers plis apparents sont faux car ils s'annulent l'un l'autre.



Où nous reconnaissons le carrefour de bandes sans demi-torsion, soit le tore troué.

Fig. 35

Cette coupure de la sphère à anse, selon un trajet réductible tracé sur l'anse, est équivalente à la coupure de cette même étoffe selon un trajet enserrant les deux pieds de l'anse. L'une et l'autre

disjoignent l'étoffe en un disque, mouchoir de coton, et un tore troué. Elles sont chacune coupure du tore selon un trajet trivial.

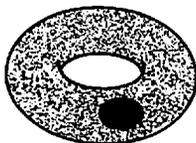
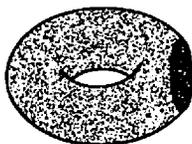


Fig. 36

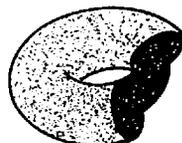
6) *Coupure d'un double tore selon un trajet médian*



Cette coupure du double tore sépare l'étoffe en deux morceaux semblables.



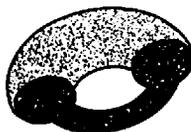
Nous étudions l'un de ces morceaux.



Nous élargissons le bord produit.



Nous obtenons un tronc de cylindre dont les deux extrémités sont reliées par une bande.



Nous réduisons la portion de cylindre, ce qui allonge la bande



pour obtenir un carrefour de bandes sans demi-torsion.

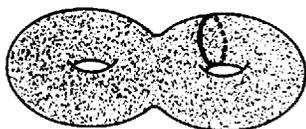
Fig. 37

Cette coupure du double tore donne deux morceaux, chacun est un tore troué.

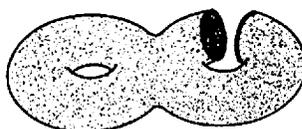


Fig. 38

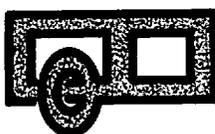
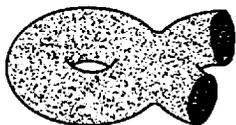
7) *Le double tore coupé selon un de ses méridiens*



Selon un trajet méridien sur l'un des anneaux,



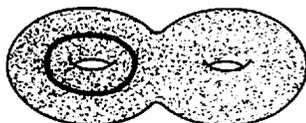
nous effectuons la coupure qui provoque un bord à deux composants.



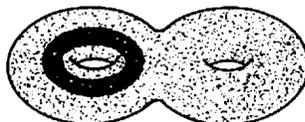
En rétractant les portions de l'anneau coupé, nous obtenons un tore deux fois troué.

Fig. 39

8) *Le double tore coupé selon un de ses longitudes*



Selon un longitude sur l'un des anneaux,



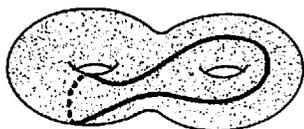
nous effectuons la coupure,

qui donne un tore à deux trous.



Fig. 40

9) *Un trajet méridien composé avec un trajet longitude dans le double tore*

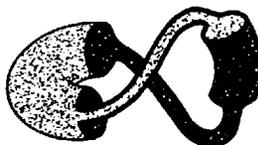
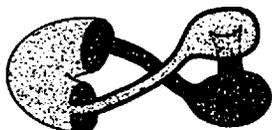
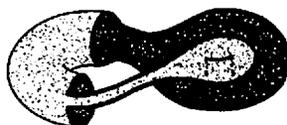


Nous traçons le trajet et

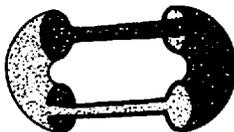


nous effectuons la coupure.

En allongeant des composants de bord, nous réduisons l'un des anneaux.

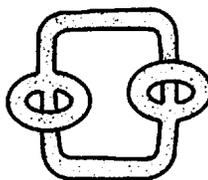
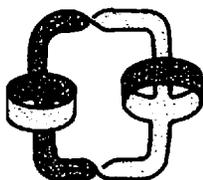


En poursuivant ce même mouvement, nous obtenons deux portions de cylindre reliées par deux bandes sans pli qui se croisent. Les deux portions de cylindre sont orthogonales : l'une est dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical.



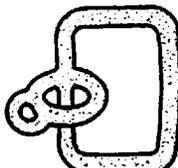
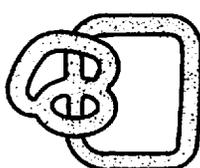
Nous renversons la portion de cylindre de droite pour défaire le croisement des bandes. Entre les portions de cylindre, les bandes vont de l'arrière vers l'avant, mais d'une manière inverse l'une de l'autre.

Et nous réduisons les portions de cylindre.



Nous déplaçons l'accrochage des bandes sur les portions de cylindre réduites pour former des carrefours. Ce qui provoque deux demi-torsions, qui s'annulent (opération III)

en faisant pivoter suivant un axe vertical la moitié de la figure. Une homotopie de bande permet de conserver les deux ponts apparents du même côté.



En déplaçant l'un des ponts apparents, nous obtenons un tore troué avec un trou en plus.

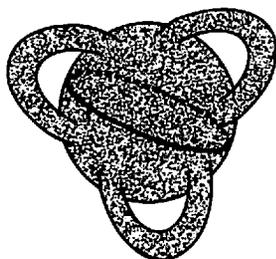
Fig. 41

Un tore deux fois troué se produit de la coupure méridienne ou longitude de l'un des deux anneaux du double tore et de la coupure selon un trajet composé d'un méridien tracé sur l'un des anneaux et d'un longitude tracé sur l'autre. Là encore s'équivalent deux coupures, faites selon des trajets générateurs différents, et une troisième composée des deux autres. Nous choisissons la coupure méridienne comme cas exemplaire de cette équivalence intrinsèque.

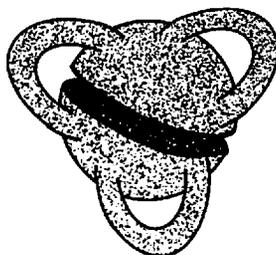


Fig. 42

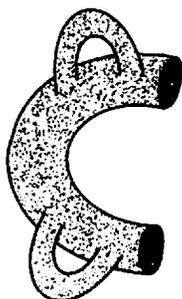
10) *Coupure d'une sphère à trois anses selon un trajet qui passe sous une anse et entre les deux autres*



Le trajet.



La coupure effectuée. Chaque anse connexe à une seule demi-sphère peut glisser



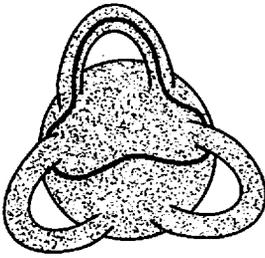
sur la troisième anse et les demi-sphères se réduisent.



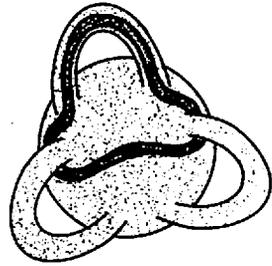
Il s'agit en ce cas, d'un double double tore à deux trous.

Fig. 43

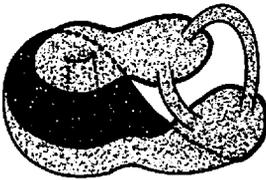
11) *Coupure d'un triple tore selon un trajet qui emprunte une anse et tourne autour du pied des deux autres*



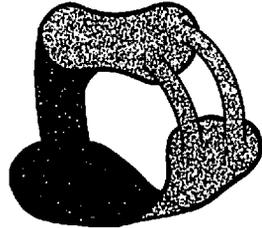
Le trajet,



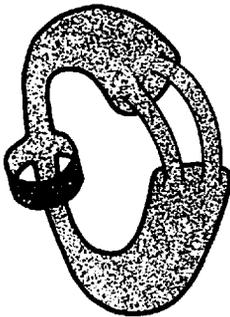
la coupure effectuée,



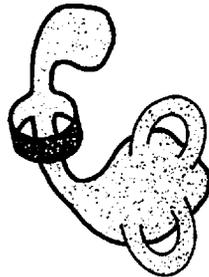
puis ouverte : la sphère et l'anse se défont en une partie torique coupée;



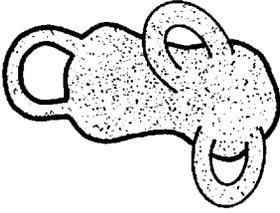
l'espace sous une anse se révèle cylindrique.



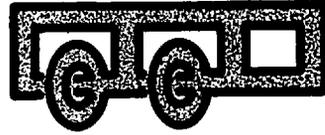
Nous réduisons cette partie cylindrique en un pont.



Nous déplaçons les pieds des anses qui traversent le pont par transformation régulière (opération III).



Le pont s'avère alors n'être qu'une simple bretelle.



Nous obtenons un double tore deux fois troué.

Fig. 44

Les deux coupures effectuées sur le triple tore donnent un double tore à deux trous. Elles sont équivalentes à la coupure selon un méridien.

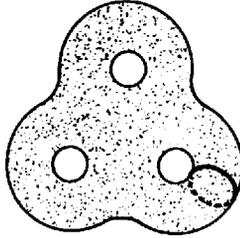


Fig. 45

Remarquons que la coupure de l'exemple 10 traité sur la sphère à anse se trace ainsi :

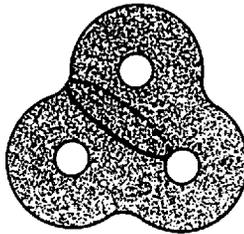
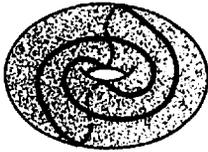


Fig. 46

sur la présentation en composition d'anneaux. En faisant glisser l'un des anneaux sur un autre nous obtiendrions la présentation de la figure 45.

12) *Coupure du tore selon l'enlacement plongé dans son étoffe*



L'enlacement plongé.



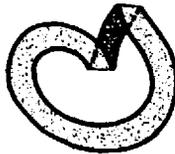
la coupure effectuée.



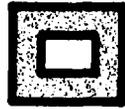
Nous obtenons deux morceaux symétriques.



Nous étudions l'un d'eux



C'est une bande à deux plis, ceux-ci s'éliminent par notre opération II



pour donner un disque troué.

Fig. 47

La coupure du tore selon l'enlacement produit donc deux sphères à deux trous : elle est équivalente à la coupure selon deux méridiens.

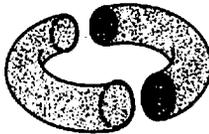


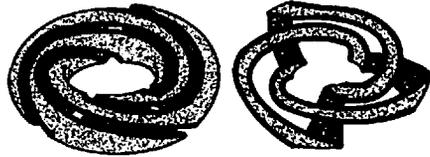
Fig. 48

Nous revenons un instant à un cas à un seul lacet pour le comparer au résultat précédent. Ces deux situations, de l'enlacement et du trèfle sur le simple tore, présentent, de la manière la plus simple, une différence et une opposition au fondement du nœud. Cette différence nous servira par la suite à distinguer entre nœuds et non-nœuds.

13) *Coupure du tore selon le nœud trèfle plongé dans son étoffe*



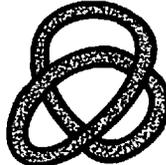
Le nœud trèfle dans l'étoffe.



La coupure effectuée donne une bande à six plis, elle-même nouée en trèfle.



Les plis se résorbent par l'opération II.



Nous effectuons une homotopie de bande (opération III) pour la dénouer.



La boucle qu'elle forme équivaut à deux demi-torsions, selon l'intermédiaire du chapitre I,

qui disparaissent par l'opération II.

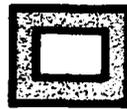


Fig. 49

La découpe du tore selon le nœud trèfle produit, de manière intrinsèque, un disque troué. Elle est donc équivalente à la coupure du tore selon un méridien.

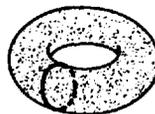
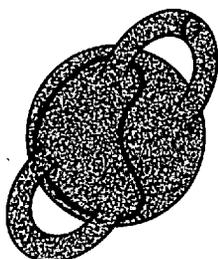
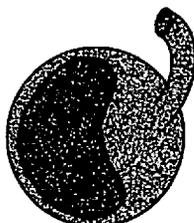


Fig. 50

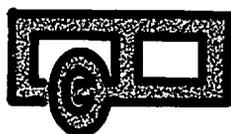
- 14) *Coupure d'une sphère à anses selon un méridien sur une anse et un trajet qui entoure un pied de celle-ci et les deux pieds de l'autre anse*



Le trajet de la coupure qui disjoint l'étoffe,



d'une part, une sphère à deux trous,



d'autre part, un tore deux fois troué.

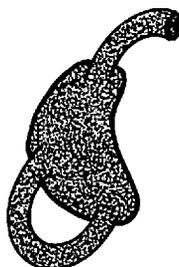


Fig. 51

Cette coupure du double tore s'avère équivalente à celle effectuée selon deux méridiens portant sur l'un des anneaux.

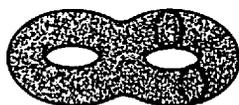
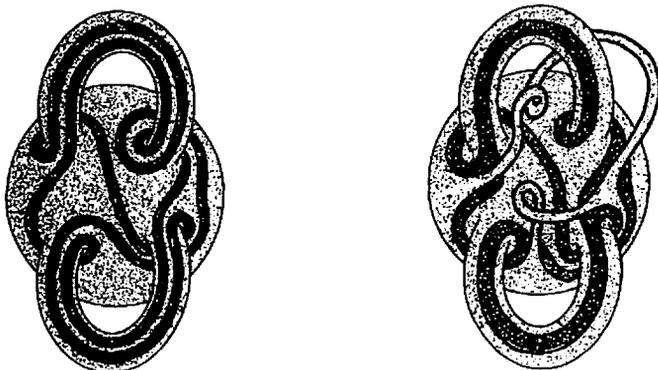


Fig. 52

Nous pouvons remarquer que le trajet consistant dans la partie sphérique de notre sphère à anses de départ peut être amené par déformation continue sur l'anse qui déjà porte un méridien : il suffit de lui faire parcourir l'hémisphère caché, de le resserrer au pied de l'anse et de le faire glisser sur elle. Alors en rétractant la sphère, nous obtenons la présentation ci-dessus.

15) Une sphère à anses découpée par le nœud de Whitehead



La coupure effectuée selon le nœud de Whitehead plongé dans l'étoffe d'une sphère à deux anses.

Nous dégageons les bretelles qui se découpent dans chaque anse. Elles comportent une boucle qui équivaut à deux demi-torsions.

Fig. 53

Intermède : étude à la base d'une anse coupée

Avant de poursuivre le déploiement des effets de cette coupure, nous montrons de manière locale la transformation qui se produit du pied d'une anse. Nous ne conservons pour cela, autour du pied de l'anse, qui serait de crêpe, que les traits de coupure qui vont la modifier. Il y a deux traits de coupure sur l'anse : l'un descend directement sur la sphère, qui serait de feutre, l'autre aborde celle-ci en contournant le pied de l'anse.



Entre les deux traits de coupure la ligne de pli du pied de l'anse apparaît.



La coupure rencontre la base de l'anse.



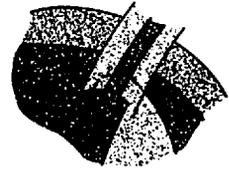
Nous basculons la figure pour changer de perspective.



Nous repoussons le trait de coupure qui contourne l'anse.



En prolongeant ce mouvement la sphère se réduit et la base de l'anse est découpée.



La coupure s'effectue derrière et à la base de l'anse.



D'un déplacement semblable de la coupure, nous dégageons l'anse de la sphère du côté droit. La base de l'anse ne demeure connexe au reste de l'étoffe qu'au niveau du pli avec la bande que nos transformations ont produite de la partie sphérique.



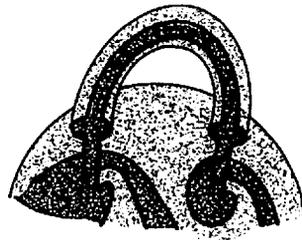
Nous réduisons l'anse en faisant remonter la coupure. Ainsi le pied de l'anse devient une bande avec un pli.

Fig. 54

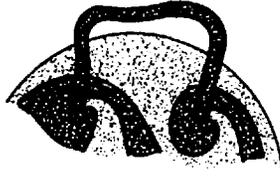
Il ne nous reste qu'à reporter ce résultat sur l'anse complète en y replaçant les traits que nous avons enlevés pour notre étude locale.



L'anse complète avec tous les traits de coupure.



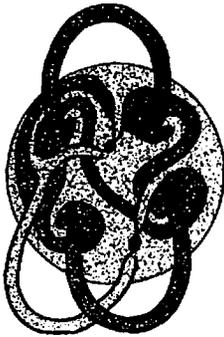
La transformation effectuée aux deux pieds de l'anse.



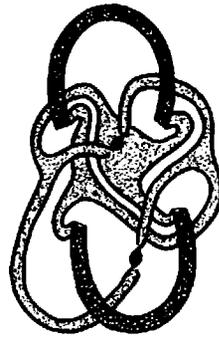
En poursuivant l'extension du trait de coupure, l'anse devient une bande à deux plis apparents.

Fig. 55

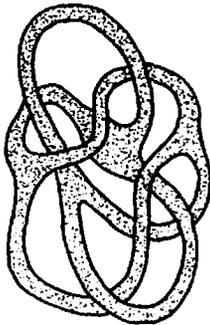
Nous pouvons, après cet intermède, reprendre notre étude de la coupure du double tore selon le nœud de Whitehead, qui en damasquine l'étoffe.



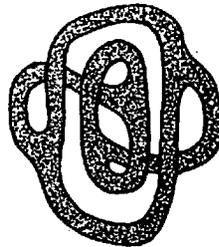
Chaque anse s'est transformée en une bande à deux plis apparents. Les bretelles dégagées dès la seconde étape comportent deux demi-torsions.



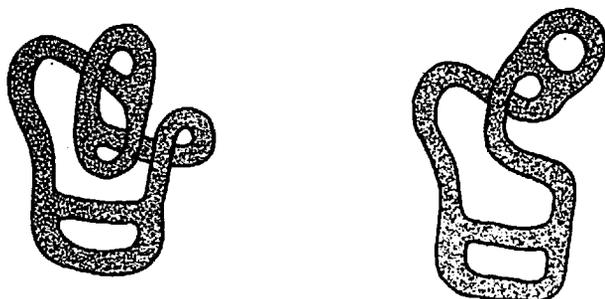
Nous réduisons la partie sphérique en déplaçant le trait de coupure le plus à gauche de l'autre côté. Ainsi obtenons-nous un carrefour de bandes.



Nous défaisons les faux plis des bandes issues des anses, et les demi-torsions des autres par l'opération II.



Deux homotopies de bande (opération III) permettent de ramener les bandes issues des anses au centre de la figure.



En déplaçant l'accrochage d'en haut à droite, nous dégageons une boucle et resserrons un trou en bas.

Nous supprimons la boucle équivalente à deux demi-torsions, qui s'effacent dans l'intrinsèque, et nous renversons la bande basse de l'élément central pour resserrer un trou.

En faisant glisser ce trou, nous dégageons une boucle, qui s'évanouit aussi pour donner une sphère à quatre trous.



Fig. 56

La coupure du double tore selon le nœud de Whitehead est équivalente à la coupure selon deux méridiens générateurs différents : les deux coupures donnent un disque à trois trous.

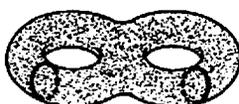
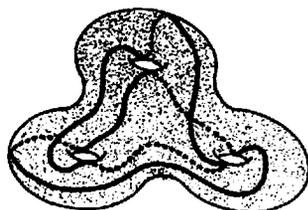
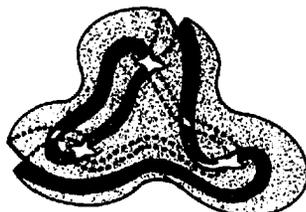


Fig. 57

16) Le triple tore découpé par une chaîne triviale



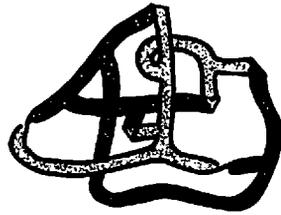
Deux ronds non noués dans le triple tore.



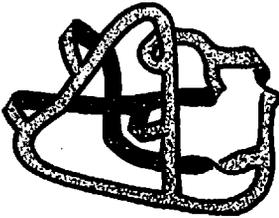
Nous effectuons la coupure. L'étoffe reste connexe.



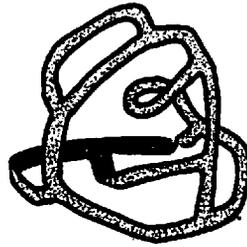
A réduire l'étoffe les plis apparaissent.



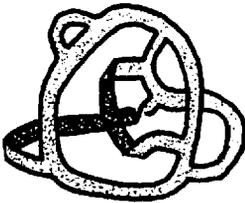
Quatre plis disparaissent, deux sur la gauche, deux en bas.



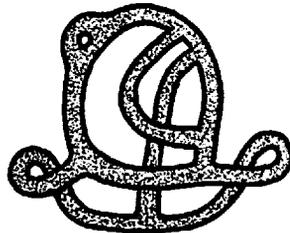
Nous basculons le croisement de bandes au centre et à gauche. Une demi-torsion et un pli se défont, tandis que trois autres se forment sur le pourtour de la figure.



Nous éliminons deux paires de plis et nous déplaçons une bande, moyennant deux transformations régulières (opération II) pour resserrer un trou en haut. Nous dégageons la boucle, qui va aussi disparaître.



Une bande avec un pli passe une demi-torsion.



Les derniers plis se résorbent, et nous déplaçons les carrefours.



Les boucles s'effacent, un trou se réduit.

Nous rapprochons les attaches du pont : l'étoffe se présente bien alors comme...

un tore quatre fois troué.

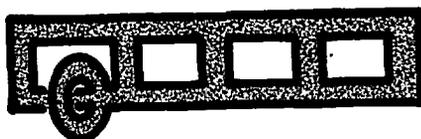
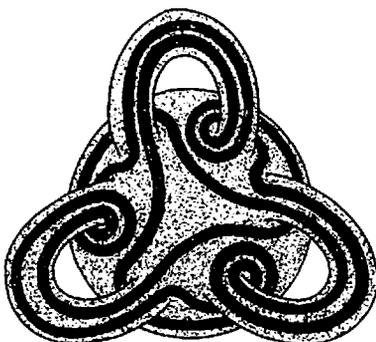


Fig. 58

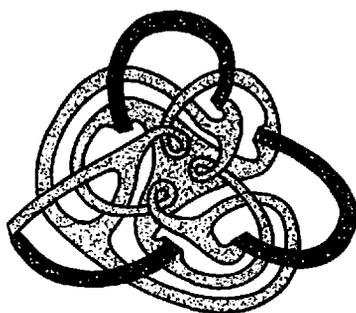
17) Coupure du triple tore selon le nœud borroméen.



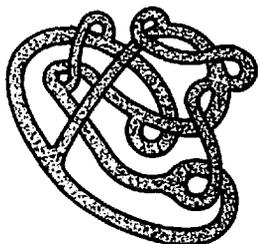
La sphère à trois anses découpée selon le nœud borroméen.

Fig. 59

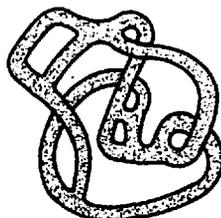
Nous dégageons les bretelles, comme de souples lés de velours, qui se découpent dans les anses et nous transformons celles-ci en bandes, comme nous l'avons expliqué dans notre *Intermède* d'étude de l'effet de la coupure sur une anse, détaillée à l'occasion du nœud de Whitehead (paragraphe 15, fig. 54 et 55).



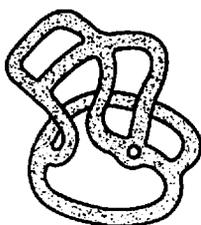
Les bretelles détachées sur les anses sont les bandes portant une boucle ; les bandes à deux faux plis sont ce qu'il reste des anses.



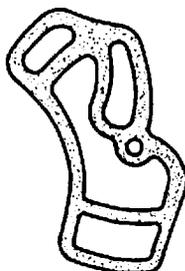
Plis et boucles disparaissent, et nous réduisons encore un peu l'étoffe.



Un trou se resserre en haut, un autre au centre de la figure moyennant une homotopie de bande (opération III).



Nous dégageons les deux boucles à droite, qui disparaissent dans l'intrinsèque.



Nous dégageons de la même manière la boucle à gauche.



Nous resserrons la figure pour obtenir un disque à cinq trous.

Fig. 60

La coupure du triple tore, selon le nœud borroméen plongé dans son étoffe, est équivalente à la coupure, selon trois méridiens générateurs différents de cette même étoffe. L'une et l'autre coupures donnent une sphère à six trous.

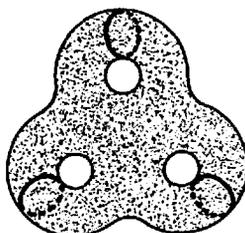


Fig. 61

a₂ - *Découpe selon un graphe*

De même que nous découpons les multi-tores selon des chaînes plongées dans leur étoffe, nous pouvons le faire selon des graphes. Couper un multi-tore selon un graphe donne un nœud ou une chaîne de bandes avec demi-torsions. Cet effet du découpage selon un graphe, se produit de manière duale à celui de la coupure selon un nœud qui donne un carrefour de bandes dont le rétract est un graphe (voir chap. V, dualité entre nœud et graphe).

4. Conclusion

L'équivalence des trajets dans l'étoffe des multi-tores, établie à partir de l'équivalence en genre et en nombre de trous des morceaux obtenus par coupure, constitue une position intrinsèque plus forte que celle du groupe fondamental. En effet, les deux générateurs du groupe du tore sont distincts pour le groupe et équivalents du point de vue des coupures.

Dans ce mode d'exploration des trajets multi-toriques, il y a beaucoup d'équivalences lorsque les lacets sont en nombre inférieur au genre du multi-tore ; lorsqu'ils sont en nombre supérieur ou égal au genre, c'est-à-dire lorsqu'ils déconnectent à coup sûr l'étoffe, il y a moins d'équivalences.

Une chaîne, plongée dans une étoffe de chintz, passe par des trous toriques. Elle fait jouer à chacun d'eux un rôle lié au nombre de passages. Plus nous réduisons le nombre de lacets et plus les trous toriques ont tendance à devenir équivalents. Ainsi, en retirant un lacet dans deux chaînes non équivalentes, pourrons-

nous obtenir deux sous-chaînes (formées des lacets restants) équivalentes.

Cette question des coupures et de leurs effets est peu étudiée, car elle correspond à une façon de compter, dont il reste à définir la structure algébrique, qui est plus forte que celle du groupe d'homologie (voir chap. III). Elle introduit à l'étude des chaînes du point de vue de leurs sous-chaînes.

Chapitre VII

L'involution signifiante, et l'a, jeu relatif des coupures Le regard

TROU MOEBIEN
FACES

1. Invariants

Le plan projectif réel est de genre 1. La bande de Mœbius est aussi de genre 1.

Le plan projectif réel a comme indicateur d'Euler-Poincaré 1. L'indicateur de la bande de Mœbius est 0.

Le groupe fondamental du plan projectif réel est $Z_2 = \{a / a^2 = 1\}$. Celui de la bande de Mœbius est Z .

2. L'involution signifiante (*L'Etourdit*, pp. 26-27)

a₁ - La présentation par L'Etourdit

Dans son écrit, *L'Etourdit*, par lequel s'achève la seconde période de son enseignement, le Docteur Lacan coordonne le tore, une étoffe bilatère, et la bande de Mœbius, une étoffe unilatère. Il expose comment la bande de Mœbius se produit à partir du tore, pour présenter l'involution signifiante (la structure du refoulement, la question de la répétition freudienne, ce que nous montrons ici par le dessin.

A la surface d'un tore nous traçons une double boucle, un trajet en huit intérieur se composant d'un méridien et de deux longitudes.

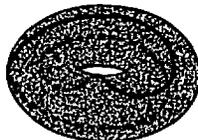
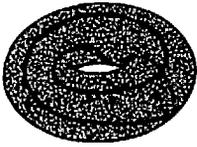
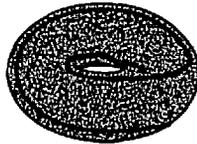


Fig. 1

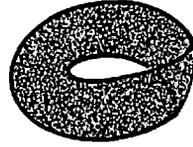
Nous le déformons de manière continue jusqu'à le faire se confondre presque partout avec les lignes de pli du tore.



Une première déformation,



une seconde qui porte le trajet à proximité des lignes de pli,

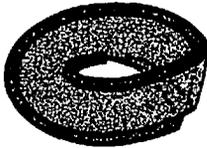


une troisième où le tore se présente comme une bande de Mœbius feinte.

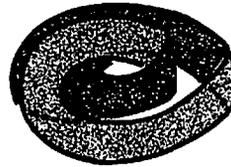
Fig. 2

Cette bande de Mœbius est feinte de n'être qu'un tore aplati dont la ligne de pli forme un huit intérieur. Nous pourrions ainsi confondre les deux nappes d'étoffe, fines comme toile de hollandaise, alors superposées en les recollant par leur face intérieure au tore. Mais l'étoffe ainsi obtenue n'en demeurerait pas moins un tore au sens mathématique du terme, puisque ayant de l'épaisseur : c'est pourquoi elle n'est que surface feinte de la bande de Mœbius.

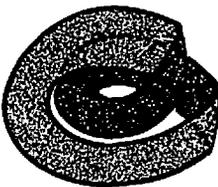
Nous pouvons produire la bande de Mœbius vraie en découpant le tore ainsi présenté.



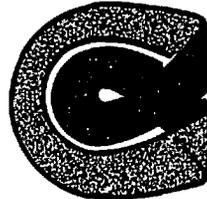
Nous découpons le tore suivant la ligne de pli formant un huit intérieur. Le huit intérieur se dédouble en deux composants de bord de la bande bipartie obtenue ainsi.



Nous défaisons alors la superposition des nappes d'étoffe,



et nous obtenons, en poursuivant ce mouvement



la présentation de cette bande bipartie où l'un des composants du bord s'affronte partout à lui-même.

Fig. 3

En recousant ce composant de bord à lui-même, nous produisons la bande de Mœbius vraie munie de la couture qui fait frontière et permet encore d'y distinguer, sur sa face unique ainsi divisée, les deux faces de l'étoffe torique.

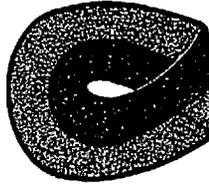


Fig. 4

Où nous voyons que cette couture met en connexion, de part et d'autre d'elle-même, les deux faces de la bande bipartie. Cette couture s'efface, les deux faces ne se distinguent plus, elles se confondent en la face unique de la bande de Mœbius.

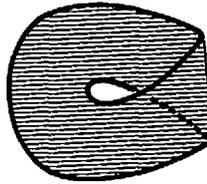


Fig. 5

Ainsi de la bande bipartie, qui est de manière intrinsèque un disque troué, une portion sphérique, nous obtenons, moyennant ce mode de couture, une bande de Mœbius unilatère.

Dans l'étoffe de cette bande de Mœbius, nous pouvons effectuer un trajet qui fait un double tour.

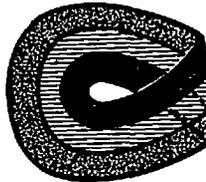


Fig. 6

Si nous effectuons la coupure le long de ce trajet, nous obtenons deux parties : une bande bipartie équivalente à celle qui nous a permis de construire la bande de Mœbius, et une bande de Mœbius médiane.

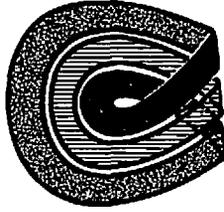


Fig. 7

Où nous voyons que la couture réalisée pour obtenir la bande de Möbius (fig. 4), couture qui parcourt un trajet faisant un tour unique, aurait pu être remplacée par la couture d'une pièce supplémentaire d'étoffe, celle-ci devant être une bande de Möbius afin de constituer, par ce montage, une bande de Möbius. Dans le sens de la construction, nous disons que la couture (trajet d'un tour unique) est équivalente à une bande de Möbius dégagée par le double tour.

Mais nous pouvons le dire inversement, car c'est à couper selon le trajet d'un tour unique (fig. 4) que la structure de la bande de Möbius se désiste.

La couture est équivalente à la structure, en tant qu'elle la produit ; la coupure est l'inverse de la couture, et la coupure à tour unique, c'est la structure, en tant qu'elle l'emporte.

En revanche la coupure à double tour laisse un lambeau mœbien. Cette coupure ne change pas la structure, puisque (fig. 6 et 7) cette structure reste attachée à l'un des morceaux. La structure se maintient et cette coupure montre que la structure mœbienne n'est pas changée.

C'est à replier la bande de Möbius dans la bande bipartie, après avoir effectué la coupure à double tour, en superposant les trois nappes d'étoffe,

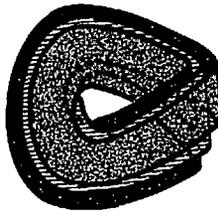


Fig. 8

de façon inverse de celle qui vient de nous donner la bande de Möbius à partir du tore, que nous pouvons voir la bande bipartie, à reconstituer le tore enveloppant la bande de Möbius médiane, l'enfermer dans un tore et la revêtir comme une doublure de bure. Ce revêtement, comme l'appellent les mathématiciens, de la bande de Möbius, où la bande bipartie se révèle pouvoir se projeter deux

fois sur la bande de Mœbius (une fois de chaque côté de chaque élément d'étoffe), constitue ce que Lacan appelle projection ou doublure (*L'Étourdit*, pp. 30 et 39) de la bande de Mœbius.

Nous pouvons dire aussi bien avec Lacan ou bien que la partie sphérique, la bande bipartie, se projette sur le composé hétérogène qu'est la bande de Mœbius médiane (p. 30), ou bien que c'est la bande de Mœbius, supplément transformant la bande bipartie en bande de Mœbius, qui se projette sur cette portion sphérique qu'est la bande bipartie (p. 39).

Cette fonction de projection est la correspondance la plus sûre que donne Lacan dans *L'Étourdit* entre topologie et concepts analytiques, à partir de l'équivalence de l'objet *a* avec la portion bipartie et sphérique provenant du tore, de la bande de Mœbius.

22 - *Les Petits Chevaux de Tarquinia*

Marguerite Duras prend prétexte des fresques étrusques de la nécropole de Tarquinia (que nous évoquions déjà p. 42) pour écrire un des romans d'amour dont elle a le secret. Nous y retrouvons le morcellement du corps dû à la prématuration de l'organisme humain sous l'aspect d'un jeune homme qui a sauté sur une mine. Tel Osiris dont le corps se trouve éparpillé, celui-ci nous rappelle le déchirement lié au moi, à la personne, du fait du narcissisme. Ici ce sont ses parents qui tentent de réunir les morceaux et l'auteur marque bien la place d'une pièce manquante qui court au travers du roman. Si ce n'est le phallus, dans ce cas il s'agit de la signature qu'on leur réclame afin d'autoriser l'inhumation. Or la signature est bien la calligraphie du nom.

Pour accorder cette situation à l'ensemble du récit, le long d'un grand fleuve que l'homme traverse parce qu'il possède un hors-bord, il nous faut reconnaître au travers de la succession des couples qui s'y croisent l'unicité du couple aux prises avec l'amour. Une série d'invariants permet de les identifier : cela va de l'enfant, de l'infidélité, de la nourriture jusqu'à la possibilité du voyage.

Le tiers personnage, notre homme, passeur bienveillant d'une rive à l'autre de cette bande d'eau, n'est pas une simple métaphore puisqu'il est mis en scène afin de souligner la nécessité dans l'amour de la métaphore elle-même. Un autre homme pour une femme, faiblesse d'aujourd'hui, une autre femme pour un homme, telle est la nécessité sexuelle du côté mâle. C'est l'articulation elle-même du schéma R avec le schéma L qu'il faut réaliser [22].

3. La bande de Mœbius

a₁ - Construction de la bande de Mœbius

Il y a deux modes de construction concurrents dont nous établirons la relation au chapitre suivant.

1 - Identification d'un composant de bord d'une bande bipartie Une bande de Mœbius se produit d'une bande bipartie



Fig. 9

qui est présentée de telle manière que l'un de ses composants de bord s'identifie avec lui-même. Montrons comment cela est possible.

Il faut une bande bilatère qui présente quatre demi-torsions,



Fig. 10

et la disposer dans une présentation qui utilise deux demi-torsions pour faire une boucle (voir chap. I, p. 74).



Fig. 11

Les deux autres demi-torsions (celles qui ne sont pas mises en boucle) peuvent glisser et se placer aux deux tournants supérieurs de notre présentation.



Fig. 12

Nous remplaçons ces deux demi-torsions par des plis,



Fig. 13

et nous obtenons la présentation de la bande bipartie qui se referme en bande de Mœbius.



Fig. 14

Cette identification originale d'un composant de bord d'une étoffe bilatère produit une étoffe unilatère.

2 - La bande de Mœbius produite par identification du carré

Bien sûr nous ne méconnaissons pas la façon trop souvent répandue de construire une bande de Mœbius par identification de deux côtés d'un carré après avoir effectué une demi-torsion.

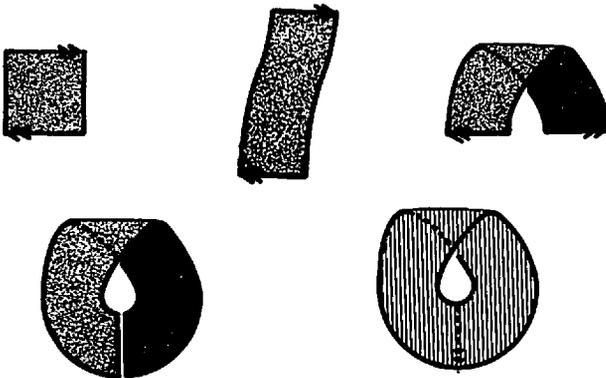


Fig. 15

Un carré peut d'ailleurs être cousu, comme morceau de finette, de plusieurs manières qui peuvent surprendre même et donner une bande de Mœbius.

Par exemple comment identifier les points j , n , J , N de manière à avoir une bande de Möbius dans le cadre de ce carré-là.

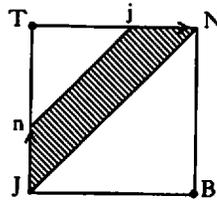


Fig. 16

Cela est aussi simple que dans le cas précédent. Nous considérons que les points T et B sont plus larges, ces points non rétractés sont en fait des pastilles.

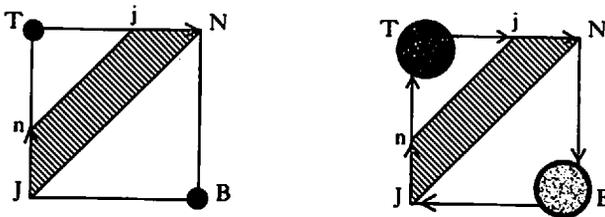


Fig. 17

Et nous pouvons supprimer la moitié des bords de ces pastilles.

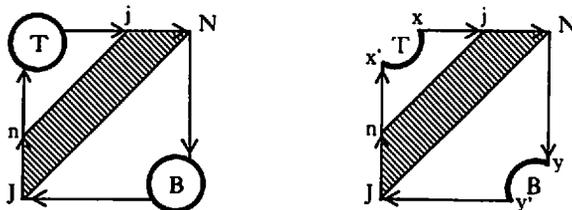


Fig. 18

Nous pouvons déformer en un nouveau carré en respectant l'orientation des segments de bord.

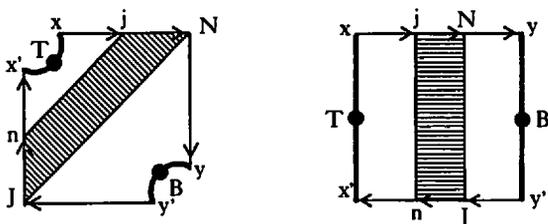


Fig. 19

Et nous effectuons l'opération d'identification de deux côtés du carré après avoir effectué une demi-torsion.

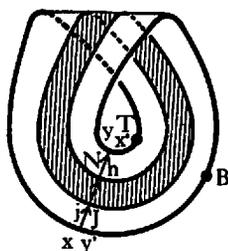


Fig. 20

Où l'on voit que le composant de bord unique de la bande de Möbius est constitué du chemin $xy'yx'$. C'est donc l'unique pastille sur ses deux faces en T et B de la figure 17 qui vient boucher le trou spécifique de la bande de Möbius (le trou mœbien).

a₂ - La bande de Möbius et ses coupures

1 - Les deux types de coupures

Dans le plan projectif réel, il y a deux types de trajets donc deux types de coupures que nous disons le double tour et le tour unique, à ne pas confondre avec les trajets et les tours sur le tore. Ici il s'agit de coupures qui sont bord consistant. Nous retrouvons ces deux types de trajets sur la bande de Möbius qui n'est qu'un plan projectif troué.

La coupure à tour unique subvertit la structure de la bande de Möbius, et c'est la coupure la plus originale puisqu'elle ne fait qu'un morceau de cette bande et la rend bilatère.

La coupure à double tour ne change pas la structure et fait, comme on l'imagine aisément d'une coupure, deux morceaux dont l'un est toujours une bande de Möbius.

Nous retrouvons ces trajets sur le cross-cap (voir Appendice p. 309) mais nous avons dit que nous les étudions sur la bande de

Mœbius par commodité de son plongement. Il n'y a pas de singularité dans ce cas : les choses sont mieux construites moyennant un trou.

Le trou mœbien (voir chap. VIII) peut être fermé par une pastille sphérique, comme par une pièce de percale, il s'agit tout simplement d'un point. L'intérieur de la bande de Mœbius sans son bord c'est le plan projectif pointé (dont on a retiré un point).

2 - Renversement à la surface du plan projectif et relation entre les deux types de coupures

Comme nous le montrons en Appendice (p. 307), c'est l'extension d'un trajet qui fait cercle d'un tour unique autour d'un point, pris en dehors de la ligne d'immersion, que nous retrouvons après transformation comme bord de la bande de Mœbius. C'est notre trajet à double tour sur la bande de Mœbius :



Fig. 21

ici orienté dans le sens de l'extension d'où il provient.

C'est à rétracter cette bande de Mœbius de manière que son bord se traverse lui-même (traversée du bord, traversée du double tour, traversée de la coupure donc traversée d'une surface, voir Appendice) que nous obtenons la coupure d'un tour unique dont chaque point est produit par l'annulation du double tour : la ligne sans point.

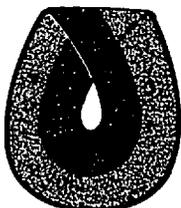


Fig. 22

En chaque point deux vecteurs s'annulent. Il y a ici une discontinuité comme en toute rétraction. En topologie cette opération n'est pas stable. Est-elle impossible ? Peut-être n'existe-t-elle pas comme telle en dimension quatre. C'est cette ligne sans

point dont nous explorons le voisinage. Lors de cette traversée, le double tour se reconstitue ; après traversée l'orientation de son trajet s'est inversée.



Fig. 23

Il y a renversement entre la portion bilatère et la portion unilatère. Cette inversion des fonctions est connexe à la notion de projection (voir Introduction).

Dans cette traversée de la coupure, la coupure se traverse comme un rond présenté en huit, qui peut faire huit intérieur, et donne lieu, si nous identifions les deux boucles, à un rond simple.

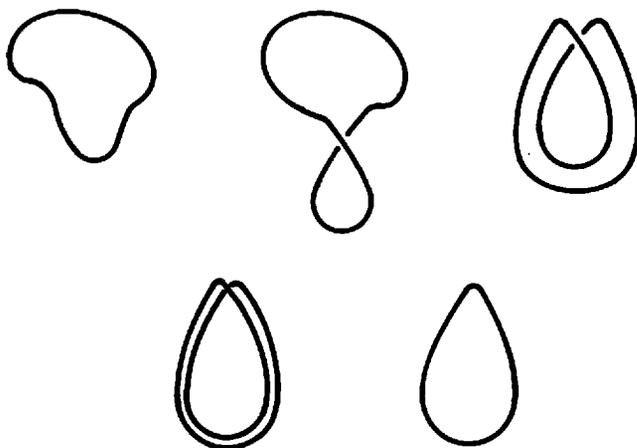


Fig. 24

a₃ - Définition de la bande de Mœbius comme surface d'empan du huit intérieur

Le huit intérieur se produit d'un rond sur lequel nous faisons une boucle en la rabattant vers l'intérieur.

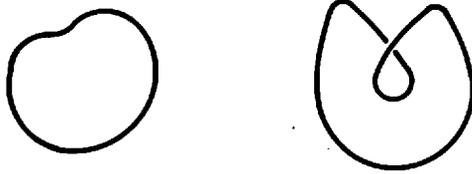
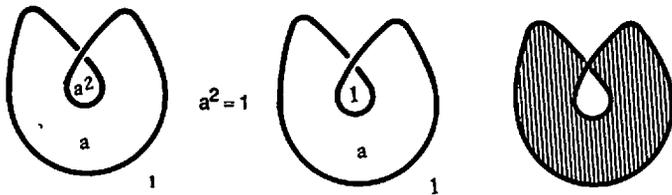


Fig. 25

La bande de Mœbius est la surface d'empan, telle que nous la définissons au chapitre premier du huit intérieur, c'est-à-dire l'étoffe dont le bord est la double boucle du huit intérieur. Le calcul du groupe fondamental de ce nœud trivial ainsi présenté donne à partir d'un générateur le marquage des zones suivant¹.



La surface d'empan du huit intérieur.
Fig. 26

Cette surface d'empan est produite par un quotient du groupe grâce à la relation $a^2 = 1$.

A laquelle nous ajoutons la ligne de pli selon le procédé expliqué au premier chapitre.

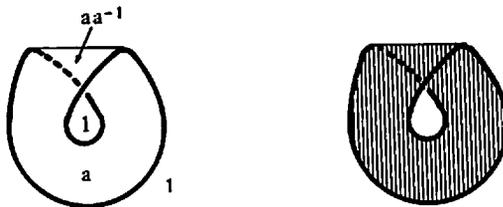


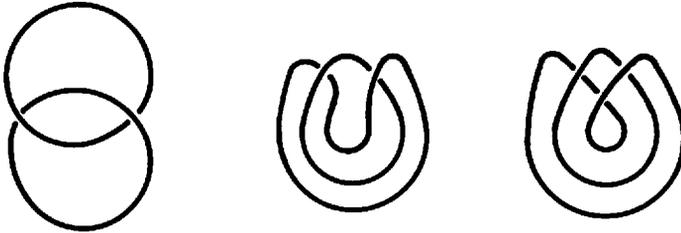
Fig. 27

1. *Essaim*, p. 123.

a₄ - *La bande de Mœbius et ses coupures à partir de l'enlacement*

1 - *La coupure à un seul tour*

En pliant l'un des ronds d'un enlacement en huit intérieur, nous obtenons une présentation de la bande de Mœbius munie de sa coupure, dite médiane, celle qui change sa structure d'unilatère en bilatère.



D'un enlacement simple nous changeons la présentation par le pliage de l'un des ronds en huit intérieur.

Fig. 28

Le calcul du groupe fondamental dans cette présentation de l'enlacement donne, à partir de deux générateurs, le marquage des zones suivant².

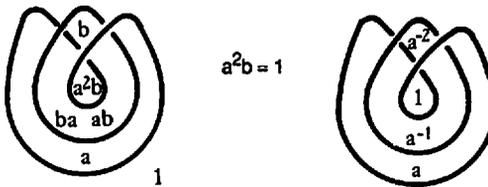


Fig. 29

Cette surface d'empan est produite par un quotient du groupe grâce à la relation $a^2b = 1$.

En remplaçant les mots par deux trames contrastées, comme nous l'expliquons au premier chapitre, nous obtenons un coloriage des zones.

2. *Essaim*, p. 121.



Fig. 30

Afin de mieux lire l'étoffe vraie qui est ici coupée, et de pouvoir vérifier comment passe la coupure autour du poinçon supérieur, nous ajoutons la ligne de pli sur cette présentation de l'enlacement.

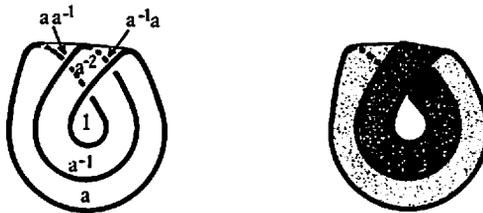


Fig. 31

La surface d'empan ainsi définie est la bande de Möbius coupée, rendue bilatère, comme du plus simple foulard.

2 - La coupure redoublée

A partir du double enlacement, nous déformons l'un des ronds de manière à le présenter comme une double boucle.



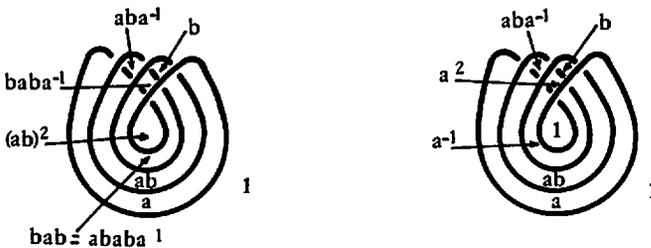
Fig. 32

Puis nous plions le second rond en huit intérieur aussi.



Fig. 33

Le calcul du groupe fondamental dans cette présentation du double enlacement donne, à partir de deux générateurs, le marquage des zones suivant³.



$$(ab)^2 = (ba)^2 = 1$$

Fig. 34

Cette surface d'empan est produite par le quotient du groupe grâce à la relation $(ab)^2 = (ba)^2 = 1$.

En remplaçant les mots par trois trames contrastées nous obtenons un coloriage des zones.



Fig. 35

Cette construction d'étoffe, légère comme une écharpe de tussor, se fait mieux et le trajet de la coupure devient plus pertinent si, sur cette présentation de deux huit intérieurs enlacés, nous ajoutons une ligne de pli.

3. *Essaim*, p. 122.

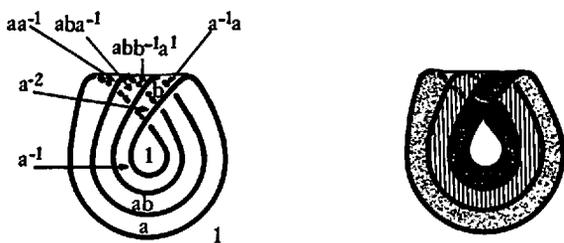


Fig. 36

La surface d'empan ainsi définie est celle d'une bande de Möbius coupée en deux bandes distinctes. L'une, tramée de deux gris contrastés, est une bande bilatère, identique à celle obtenue précédemment du fait de la coupure à un seul tour ; l'autre, médiane, hachurée, est une bande de Möbius dont le bord est le premier huit intérieur produit sur le double enlacement.

Ainsi se montre que c'est à découper une bande de Möbius médiane dans une bande de Möbius qu'on produit une bande bipartie. Cette bande bipartie est tout ce qui résulte de la coupure simple qui opère donc sur la bande de Möbius comme la bande de Möbius (médiane). La coupure, à un seul tour, concentre donc en elle le trait caractéristique de la bande de Möbius ; elle est la bande de Möbius elle-même (*L'Etourdit*, p. 27).

a₅ - Les autres Möbius extrinsèques

La surface intrinsèque de toute bande présentant de manière extrinsèque un nombre impair de demi-torsions est une bande de Möbius, puisque nous pouvons éliminer par paire les demi-torsions qui se suivent sur une même bande (voir chap. II).

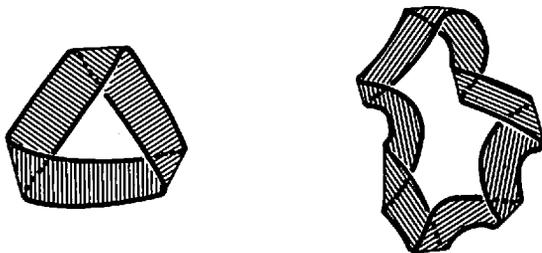


Fig. 37

Les nœuds de bord de ces bandes de Möbius extrinsèques sont des nœuds trèfles, des nœuds toriques (voir chap. V) accomplissant deux tours longitudes et un nombre impair de tours méridiens. Ce

sont des nœuds-coupures dont nous ferons un large usage pour notre présentation des nœuds dans le fascicule n° 3 de notre série.

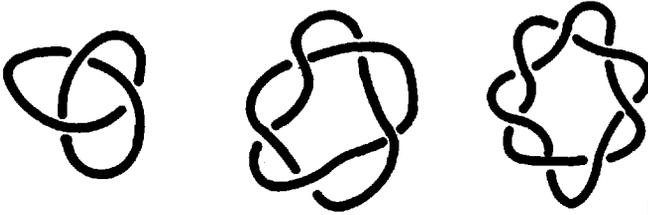


Fig. 38

4. Les masques

Il faut noter avec Jean Delay que le symbole, plus que représentation d'un complexe, n'en est pas seulement la projection mais la transformation. "Le travail du symbole se rapproche de ce qu'on pourrait appeler la fonction du double" ([21], vol. 2, p. 264).

A ce propos, si nous relevons d'abord le terme d'âme nous pouvons nous tourner vers l'ethnographie et la théologie. Les théories ethnologiques de l'âme font appel à deux manières de concevoir l'âme ([29 b], pp. 260-261). Il y a le monde des âmes, habité par une sorte de duplicata des êtres ; ils sont susceptibles de permutations et d'entrer en combinaisons entre eux.

Il est à noter qu'il apparaît souvent comme un monde renversé. Nous ne pouvons nous empêcher de reconnaître la pertinence de cette conception qui rappelle ce lieu où s'organise les lois du signifiant. D'ailleurs Lévi-Strauss signale que cette question s'éclaire à la lumière des travaux linguistiques récents, en citant R. Jakobson "qui distingue deux modes fondamentaux de la pensée logique respectivement associés à la métonymie et à la métaphore".

Si nous ne nous arrêtons pas aux travaux de R. Hertz qui distingue entre âme de la chair et âme des os, Lévi-Strauss nous indique que la documentation indonésienne et mélanésienne a permis de préciser une autre opposition. Il s'agit de distinguer entre la société des âmes et "le groupement organique des âmes fonctionnelles tenues pour constitutives de l'individualité de chaque être humain." Nous reconnaissons ici les deux écueils que Freud a voulu éviter avec sa théorie du moi dès 1914 (S. III, *Freud dans le siècle* et ici Présentation de la série, p. V).

Il s'agit de ne pas prêter au dualisme d'un monde symétrique en ce qui concerne cette pensée autre qui parle dans les trébuchements de ma parole. Il faut éviter aussi de ramener l'unité du sujet parlant à son unité organique.

Compte tenu de ces précautions, si cette société des âmes est le lieu du signifiant et que la constitution des individus est fait d'un groupement organique des âmes fonctionnelles, nous ne pouvons que nous instruire de ces doctrines dites primitives, plutôt que de leur suspecter une pensée magique un peu simpliste. Elles relèvent de la structure du langage et contiennent une vérité structurale sinon historique.

Nous nous instruisons autant à considérer de la même manière, quoique dans un contexte différent pour la science qui en sera l'issue, la conception de l'âme dans la théologie médiévale ([23], p. 241) : "Pour Saint Thomas comme pour Aristote l'âme ne fait pas que mouvoir un corps, elle fait d'abord qu'il y en ait un", comme nous le remarquons à la suite de Lacan en définissant le 2 de l'Imaginaire par le corps. Gilson conclut que "l'âme humaine est donc une substance immatérielle, ce qu'il fallait démontrer".

Lacan a su démontrer que le sujet de la psychanalyse est le sujet cartésien. Il rend hommage à Descartes qui témoigne par-là de l'avènement d'une position subjective, corrélat indispensable de la science nouvelle. Comme Canguilhem le montre d'une manière amusante, d'un jeu de mot sur "l'intérieur" chez Descartes, un glissement s'est opéré qui donne naissance à la psychologie intimiste. Sans doute chez Descartes l'âme c'est le moi de notre moderne psychologie. Et l'on comprend que Lacan parle des séquelles du cartésianisme jusqu'à Hegel. Dans son discours de la méthode, Descartes pose et retrouve Dieu et son moi dès qu'il a formulé ce point évanescent de la subjectivité que Lacan va ouvrir. Après avoir énoncé "je pense donc je suis", il définit ainsi son moi dans une parenthèse : "(c'est-à-dire mon âme, c'est-à-dire ce par quoi je suis ce que je suis)", traduction chrétienne de la formule biblique qui ouvre à cette forme d'idéalisme que devient la théologie moderne et qui s'appelle anthropologie. Où Dieu de son existence au monde est remplacé dans l'univers par l'homme, c'est-à-dire son moi. Dans la psychologie moderne, les doctrines du moi retrouvent en méconnaissance de cause les traits des doctrines théologiques de l'âme. Cela implique qu'on sache s'y référer avec un peu de sérieux comme de se reporter à nos références qui ne sont pas exemptes de pertinence dans les doctrines dites primitives. D'être ainsi incluse, la psychologie est située ; la psychanalyse est autre chose de partir d'un geste clinique renouvelé par la pratique d'une autre structure.

Cela nous ramène à la fonction du masque en la raccordant à la théorie de l'identification freudienne telle que Lacan l'a brossée pour nous. Ces masques qui démasquent en dédoublant et représentent en démasquant : fermés, ils composent ; ouverts, ils

dédoublent (E. p. 752). Ces masques à volets "offrent une série de formes intermédiaires qui assurent le passage du symbole à la signification, du magique au normal, du surnaturel au social. Ils ont donc à la fois pour fonction de masquer et de démasquer" ([29 b], p. 289).

C. Lévi-Strauss après avoir situé le riche matériau dont il dispose, non sans avoir relevé la trace érotique d'une pointe de sadisme chez les Caduveos (p. 280) formule pour nous le problème de la corrélation ou dualité entre l'expression plastique et l'expression graphique.

Il signale, après Boas, qu'il s'agit d'une pratique de la dimension : "selon lui, la split représentation (dédoublement) dans la peinture ou le dessin serait seulement l'extension aux surfaces planes d'un procédé qui s'impose naturellement dans le cas des objets à trois dimensions". Ainsi C. Lévi-Strauss cerne de façon plus fine le trait structural qui est associé à ce dédoublement : "la dualité est en définitive celle de l'acteur et de son rôle et c'est la notion de masque qui nous en apporte la clé." (P. 288.)

"Toutes les cultures à masques ne pratiquent pas le dédoublement." (P. 291.)

Ainsi peut-il relever, hors l'atmosphère semi-religieuse qui entoure la confection des décors du visage, le fait que dans le cas du dédoublement se retrouve la représentation des ancêtres — Lévi-Strauss y associe une ancestralité — alors que leur absence correspond à un lien moins serré où il s'agit de dieux — les masques forment un panthéon.

La fonction de ces masques articulés, comme la fonction du dédoublement de la représentation, est donc corrélée au réseau combinatoire de la parenté, attestant par-là le lien avec la mise en fonction du père par son nom. Il s'agit de la fonction qui permet la composition des deux moments de l'Œdipe. Dans les schémas F et R entre I et A, soit en Perception-signes (E. pp. 556-557) (voir chap. IV).

Et c'est à distinguer entre les dieux et la fonction du père, entre la fonction de l'acteur et son rôle, que s'établit le trait de structure qui permet la symbolisation (*Verneinung* de Freud sur la base des perception-signes), repousse l'éviscération imaginaire comme nous le montrons maintenant (Phersu, voir Introduction, p. 42), introduit au narcissisme et provoque le transfert (voir Introduction, p. 45), différencie la névrose de l'arriération, consiste dans le trait unaire, et correspond au fonctionnement de la structure dans son ensemble.

Nous voulons parler de la fonction de la Lettre qui gouverne l'écriture et la lecture. L'absence de cette fonction fait entendre la

langue comme un flux verbal, sans découpe séquentielle. Mais s'il s'agit de découpe, la difficulté réside en ce qu'elle ne se fait pas sans lien, d'être structure d'être accompagnée d'une réunion corrélatrice. Il y a coupure et liaison en un même geste, un acte dont nous établissons la logique⁴.

Ainsi l'acteur n'a pas la même position dans les deux cas vis-à-vis de son rôle sous l'aspect de la permanence et de l'imprégnation. Le dédoublement s'associe dans la vie sociale à des titres, un rang, des classes dans l'échelle des statuts. "Cette adhérence est si rigoureuse que, pour dissocier l'individu de son personnage, il faut le réduire en lambeaux." (P. 292.) En effet dans *Tristes Tropiques*, lorsqu'il analyse les dessins des femmes caduveos qu'il a recueillis, après avoir noté leur ressemblance avec nos jeux de cartes dont les figures sont taillées en biseaux, et invoqué l'invention de Lewis Carroll au pays des merveilles, Lévi-Strauss relevait déjà cette touche de cruauté associée à la solution d'une difficulté rencontrée par les Caduveos dans la réalité pour leurs lois combinatoires de l'alliance et de la parenté ([29 a], pp. 203 à 224).

"Adorables civilisations, de qui les reines cernent le songe avec leur fard : hiéroglyphes écrivant un inaccessible âge d'or qu'à défaut de code elles célèbrent dans leur parure, et dont elles dévoilent les mystères en même temps que leur nudité."

Dans la fonction des masques, la structure qui importe, comme dans notre topologie du sujet (logique de Boole modifiée), c'est la conjonction de ce qui est identique et de ce qui est différent dans cette corrélation de dimensions où se produisent des renversements et de l'indistinction (*fading*). La façon d'établir la bonne médiation à l'égard de l'inceste, celui-ci étant défini par l'interdiction de la mère, du fait que la mère reste interdite car sa division impensable, insupportable, constitue la structure de la castration.

4. *Nons*, fascicule n°0.

Chapitre VIII

La perspective tordue

Le regard et la voix

TROU MÖBIEN
TROU IMAGINABLE
FACES
DEMI-TORSIONS

1. Invariants

Le plan projectif à deux trous est de genre 1, comme le plan projectif réel.

Son indicateur d'Euler-Poincaré est 1.

La bouteille de Klein est de genre 2. La bouteille de Klein à un trou est du même genre 2 par définition.

L'indicateur d'Euler-Poincaré de la bouteille de Klein est 0. La bouteille de Klein une fois trouée a comme indicateur -1.

Le groupe fondamental de la bouteille de Klein est présenté par deux générateurs et une relation, $\{a, b / a^2 = b^2\}$.

2. Les carrefours de bandes avec demi-torsions

Nous avons déjà rencontré au chapitre VI le carrefour de bandes non tordues. C'est une présentation du tore troué. Mais les carrefours de bandes présentant des demi-torsions ne nous sont pas, non plus, inconnus. Nous les avons pris comme exemples d'un problème topologique, celui de la présence ou de l'absence de demi-torsion effective sur une bretelle présentant ou non une demi-torsion apparente (chap. III). Ce problème a été résolu grâce à un indicateur (invariant) : il s'agit du nombre de bord de l'étoffe.

a₁ - Le carrefour de bandes portant, chacune, une demi-torsion

Partons d'un carré I^2 , coupon de drap dont les côtés sont orientés par des flèches qui indiquent le mode d'identification des bords.



Fig. 1

En suivant ces indications, nous identifions ceux-ci deux à deux en une déformation souple de ce morceau d'étoffe. Une première fois par la gauche ; la bande ainsi étirée doit être pliée afin que les deux flèches des extrémités se présentent en regard l'une de l'autre.



Fig. 2

En effectuant l'identification — comme nous l'avons fait au chapitre VII — nous obtiendrions une bande de Mœbius. Nous la laissons, à cette étape, inachevée. Nous étirons une seconde fois notre carré vers le haut, puis, après un passage au-dessus de la bande précédente,

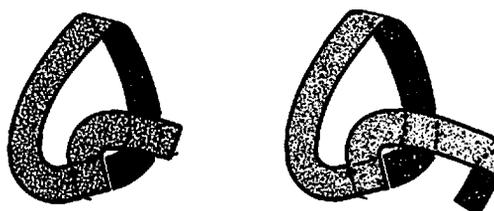


Fig. 3

nous plions cette seconde bande afin que la flèche marquée se présente avec la même orientation que celle portée par le côté inférieur du carré de départ.

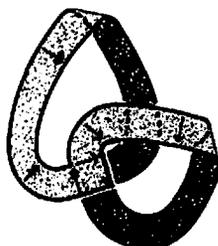


Fig. 4

Enfin, nous réalisons les deux identifications. L'étoffe ainsi construite est un carrefour de bandes avec une demi-torsion chacune.

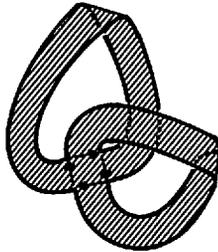


Fig. 5

Cette étoffe unilatère est un plan projectif deux fois troué, soit une bande de Mœbius avec un trou.



Fig. 6

Les deux trous du plan projectif sont faits de la superposition de points, comme nous l'avons vu pour la sphère à trois trous (chap. IV) et le carrefour de bandes sans demi-torsion, le tore troué (chap. VI). Ici, deux coins opposés par la diagonale du carré se superposent pour donner un trou, et les deux autres, pour donner le second trou.

a₂ - Le carrefour dont une seule bande est pliée

Il reste à considérer le cas où deux côtés opposés d'un carré s'identifient dans une inversion de leur orientation et où les deux autres côtés ne sont pas inversés.



Fig. 7

Nous étendons notre carré vers la gauche et nous plions la bande pour amener les deux flèches verticales en regard.



Fig. 8

Si cette première opération est identique à l'opération initiale de la construction du carrefour de bandes tordues, la seconde, elle, différera. Nous étirons de nouveau le carré vers le haut ; puis, après le passage de cette bande au-dessus de la précédente, nous en portons l'extrémité près du côté inférieur du carré, sans avoir à plier la bande étirée pour que les flèches marquées se correspondent.

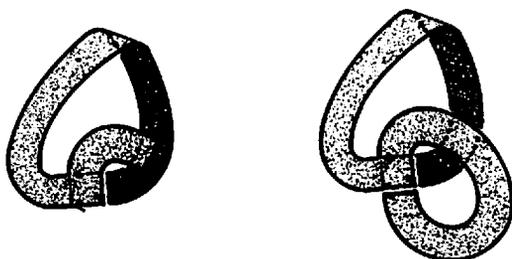


Fig. 9

En identifiant les segments ainsi rapprochés, nous obtenons un carrefour composé d'une bande tordue et d'une autre sans demi-torsion.

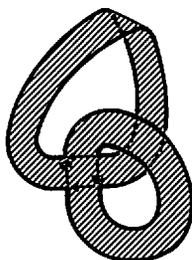


Fig. 10

Cette étoffe est un composé de deux plans projectifs avec un trou. Ce carrefour de bandes, dont une seule est tordue, est une bouteille de Klein trouée.



Fig. 11

Le trou de cette bouteille de Klein est constitué, comme dans tous les cas, de la superposition de points, sommets du carré de départ. Ici, comme pour le carrefour de bandes sans demi-torsion (chap. VI), les quatre coins se superposent pour ne donner qu'un trou.

a3 - Fermeture du trou sphérique du carrefour de bandes tordues

Nous pouvons présenter la figure 5 en disposant les deux bandes du carrefour, telles des rubans de batiste, de manière que l'une longe l'autre.

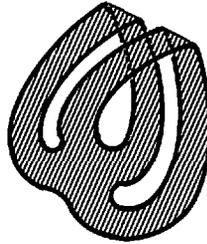


Fig. 12

Si nous refermons le trou, qui est maintenant déjà plus réduit, nous pouvons lui faire passer le pli et constater sa structure sphérique. Ce trou peut être fermé par un disque.

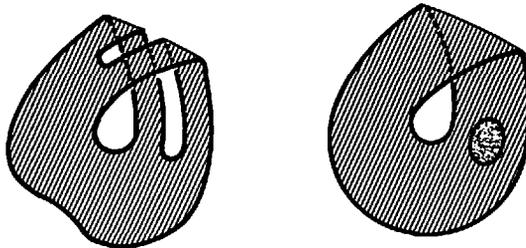


Fig. 13

Nous aurions pu directement placer un disque déformé et plié pour boucher ce trou.

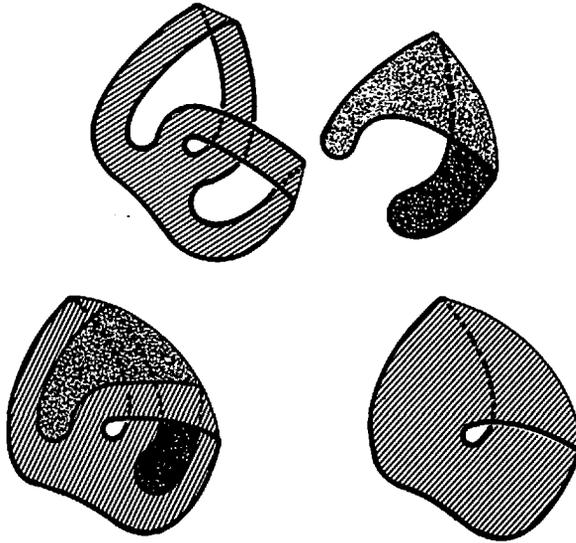


Fig. 14

3. La bande de Mœbius trouée

a₁ - *Le trou mœbien*

Au travers d'un trou du disque troué, trou imaginable comme rupture de surface, nous plaçons une bretelle tordue. Nous obtenons un trou mœbien imaginable dont le composant de bord trace un huit, et non pas deux trous comme dans le cas du pont non tordu (voir chap. IV).

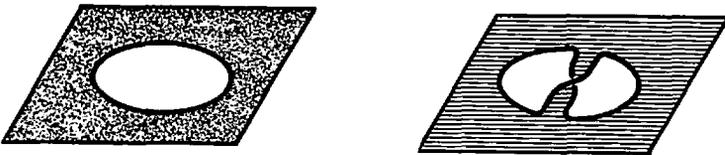


Fig. 15

Nous pouvons, par un simple changement de présentation, montrer que ce disque troué muni d'un bretelle tordue est une bande de Mœbius trouée une fois.

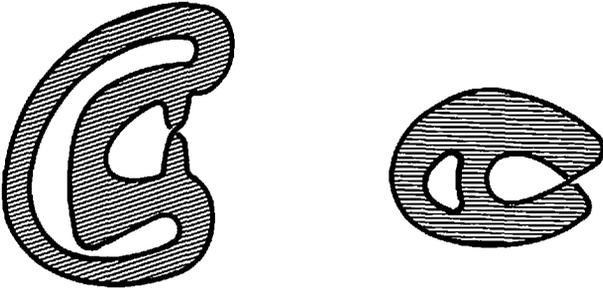
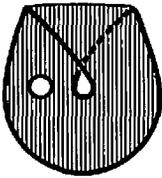


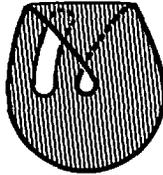
Fig. 16

a₂ - Monstration de l'équivalence des deux trous

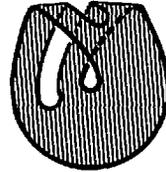
Nous montrons l'équivalence des deux trous de la bande de Möbius trouée par un changement de présentation où les deux composants de bord s'échangent, comme en un lé de zéphyr.



Une bande de Möbius avec un trou, soit une pastille sphérique ôtée (trait plus fin).



Agrandissons le trou pour l'amener sous le pli



que nous lui faisons passer.



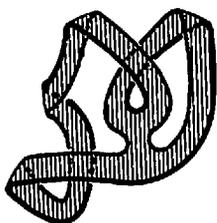
Poursuivons le mouvement



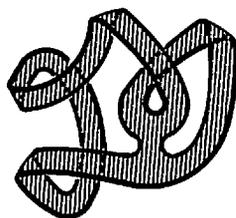
en amenant le bord du trou dans sa plus grande extension.



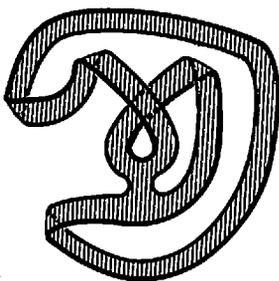
Sur une des bandes, nous faisons apparaître deux plis.



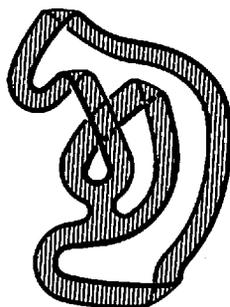
En déformant la boucle ainsi produite,



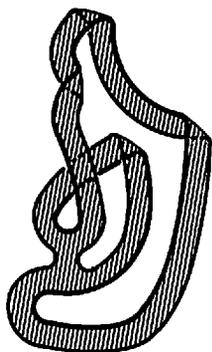
nous l'amenerons à passer sous la figure,



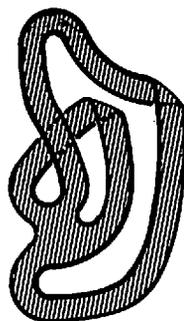
puis à en faire le tour de l'autre côté.



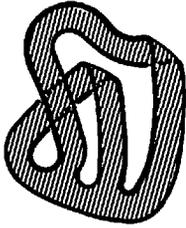
Déplaçons les deux demi-torsions le long de la bande.



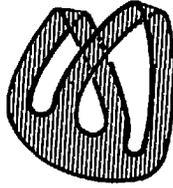
L'une d'elles vient s'annuler avec une autre demi-torsion,



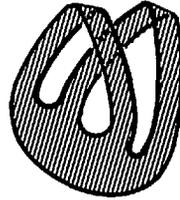
l'autre a glissé vers le haut de la figure.



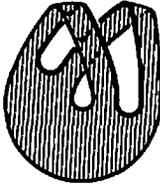
Nous réduisons alors la boucle du bas



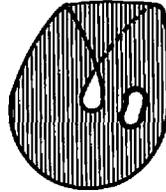
et amenons la boucle du haut à glisser au-dessus d'un pli.



Il nous reste à effectuer une immersion de bande pour inverser leur dessus-dessous,



et à réduire le trou en trait plus fort.



Le bord de la bande de Möbius est maintenant le composant de bord dessiné avec une graisse plus fine.

Fig. 17

Les deux composants de bord ont échangé leur rôle, les trous qu'ils cement sont donc bien équivalents quoique l'un d'entre eux, nécessairement, ne se referme pas.

a3 - Trou et zone mœbienne

Cette inversion des trous de la bande de Möbius trouée peut être effectuée sur la bande munie de sa coupure à double tour.

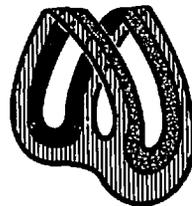
• Le trou est dans la zone mœbienne



Une bande de Möbius munie de sa coupure, et d'un trou dans la zone unilatère.



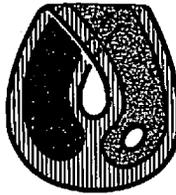
Agrandissons le trou dans la partie non orientable.



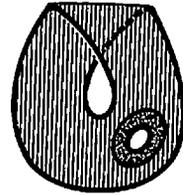
En effectuant les changements de présentation et l'immersion de bande,



nous pouvons réduire le trou de l'autre composant de bord,



il s'avère que c'est un trou dans une pastille bilatère.

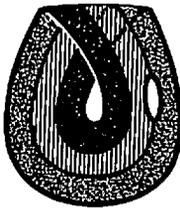


Laquelle peut se réduire réduire autour de ce trou.

Fig. 18

• Le trou est contre la zone mœbienne

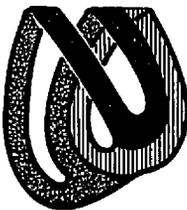
Il nous reste à considérer ce cas où le trou est entre la zone mœbienne et la zone bilatère.



Le trou le long de la coupure,



peut être étendu pour faire presque un tour.



En suivant la procédure présentée plus haut, par une immersion de bande,



il est possible de resserrer le trou qui faisait bord à la bande de Mœbius en un trou sphérique dans la partie bilatère.

Fig. 19

Cette présentation inhabituelle de la bande de Mœbius fait apparaître le double tour de la coupure comme décalé : l'un des deux tours se confond avec le bord de cette étoffe, comme un pan de vichy jouerait de ses rayures.

a₄ - Correspondance entre les deux constructions de la bande de Mœbius

Nos deux constructions de la bande de Mœbius (voir chap. VII) peuvent être mises en relation grâce aux deux figures suivantes : elles sont équivalentes.

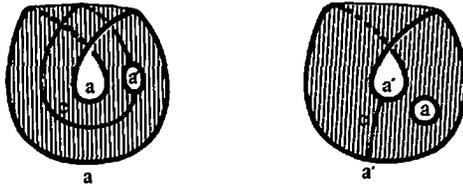


Fig. 20

Leur équivalence se montre par l'inversion du rôle des deux trous a et a' de cette bande de Mœbius trouée. Pour la première, nous construisons la bande de Mœbius par identification d'un composant d'une bande bipartie (bande bilatère à quatre demi-torsions). Ici nous pratiquons un trou a' en travers de la couture c . L'identification du composant de bord de la bande bipartie n'est donc que partielle.

La seconde construction était une bande de Mœbius produite par identification de deux côtés d'un carré. Ici le carré est muni d'un trou a , c'est un disque troué. Cette identification est marquée sur la figure d'une coupure c transverse de la bande.

Par l'échange de la fonction des deux trous, comme nous venons de le montrer dans le chapitre présent, nous passons d'une présentation à l'autre. La coupure transverse de la seconde devient coupure médiane de la première, et le trou mœbien (dont le bord est un huit intérieur) de la seconde devient élément de la coupure médiane de la première. Il faut pourtant distinguer ces présentations.

En identifiant, sur la première, les deux demi-cercles du trou sphérique, nous achevons l'identification d'un composant de bord d'une bande bipartie, c'est-à-dire la couture unissant en tout point, tout au long de la couture, la face envers à la face endroit. Cette couture, ligne sans points — coupure à un seul tour — structure la bande de Mœbius où en tout point s'unissent l'envers et l'endroit. La bande de Mœbius n'est alors rien d'autre qu'une série de lignes sans points.

Alors que, dans la seconde construction, la couture transverse c , qui n'identifie qu'une partie d'un composant de bord de la bande bilatère, ne structure pas la bande de Mœbius en une série de lignes sans points puisque ce n'est pas tout au long de cette couture qu'avec l'envers nous cousons l'endroit, mais seulement en un travers qui n'en dit pas la structure. Ici, un trou a ne participe pas

à produire la bande de Mœbius : l'autre trou a' se forme dans l'identification, il devient le trou mœbien qui permet le plongement de cette étoffe. Tandis que, dans la première construction, les deux trous jouent un rôle : l'un a' , élément de la coupure c , est la trace de l'inachèvement de l'identification d'un composant de bord ; l'autre a devient le trou mœbien.

4. Revenons à nos demi-torsions

a_1 - Construction des étoffes quelconques

1 - Les multi-carrefours

Les multi-carrefours de bandes sont la généralisation des identifications des côtés de polyèdres ayant un nombre pair de côtés. Autrement dit, les multi-carrefours sont le montage sur un disque de plusieurs bretelles ou rubans, tordus ou non tordus, faisant boucles.

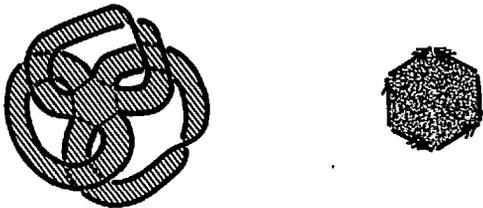


Fig. 21

Un tel multi-carrefour n'est jamais qu'un carrefour de rubans auquel a été ajoutée une bretelle.

Ces multi-carrefours peuvent se ramener aux schémas de Griffiths d'après la théorie des surfaces topologiques exposée au chapitre II.

2 - Une bretelle ajoutée à un schéma de Griffiths

De même une bretelle (ou ruban) ajoutée à un schéma de Griffiths donne lieu par changement de présentation à un autre schéma de Griffiths, selon la théorie des surfaces.

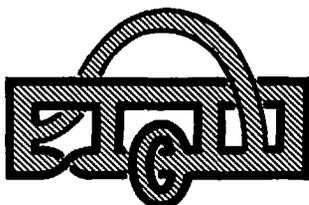


Fig. 22

Au lieu de décrire la structure de l'étoffe obtenue en effectuant un changement de présentation par le dessin, comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, il nous importe ici de savoir si nous pouvons pronostiquer ce résultat à l'aide d'invariants.

a₂ - Montage d'une bretelle sur une étoffe quelconque

Nous cherchons à pronostiquer si des bretelles quelconques présentant ou ne présentant pas de demi-torsions peuvent être considérées comme des bretelles gauches, c'est-à-dire effectivement tordues.

1 - Bretelle ou pont

Le premier trait pertinent est de savoir si ces bretelles quelconques ont été attachées sur un même composant de bord ou sur deux composants différents du bord.

En effet, il y a deux manières d'ajouter une bretelle à une étoffe :

a - En l'accrochant à un même composant de bord ; nous conserverons le terme de bretelle qui est employé alors au sens strict.

a' - En l'accrochant sur deux composants de bord ; en ce second cas il s'agit d'un pont.

2 - Dans le cas des bretelles strictes

Nous avons traité le problème des bretelles proprement dites, c'est-à-dire s'accrochant à un seul composant de bord de l'étoffe considérée, au chapitre III.

Dans ce cas, le second trait pertinent, qui nous a servi à décider dans chaque situation orientable ou non orientable, consiste dans le changement du nombre de bord produit par la composition de la bretelle considérée.

a - Si le nombre de bord augmente de 1, la bretelle est non tordue ;

a' - Si le nombre de bord reste inchangé, la bretelle est effectivement tordue.

Compte tenu de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques (voir chap. II), rappelons qu'une surface topologique intrinsèque se compose de zéro, une, ou deux bandes de Möbius. Il n'y a donc qu'une ou deux demi-torsions effectives sur des bretelles différentes, de ce point de vue intrinsèque.

S'il existe plus de deux bretelles portant une demi-torsion effective, elles se réduisent par paire en des parties toriques présentant donc un pont non tordu.

Le nouveau problème consiste à pronostiquer le caractère effectif ou non des demi-torsions sur les ponts ajoutés à une étoffe qu'ils présentent ou non une demi-torsion apparente, car chacun de ces cas peut être envisagé.

3 - Dans le cas des ponts

Dans tous ces cas le nombre de bord passe de deux à un, ($b = 2 \rightarrow b = 1$) ; dans le cas général de b à $b - 1$. Le critère retenu pour apprécier l'effectivité des demi-torsions sur les bretelles ne permet pas de distinguer les ponts effectivement tordus d'avec les ponts non tordus.

Le troisième trait pertinent consiste à savoir si le pont est composé avec une étoffe bilatère ou une étoffe unilatère.

a - Si le pont est composé à une étoffe bilatère.

Il faut, pour décider de l'effectivité des demi-torsions, ajouter un autre invariant. Le résultat dépend du changement d'orientation de l'étoffe produite par la composition du pont.

(*a*) Si le nombre de faces reste inchangé, il n'y a pas de demi-torsion effective, que le pont présente ou non des demi-torsions apparentes. Il se constitue une partie torique correspondante dans les schémas de Griffiths.

(*a'*) Si l'on passe d'une étoffe bilatère à une étoffe unilatère, le pont est tordu.

Mais, dans ce cas, la théorie des surfaces et le changement de présentation, comme nous le montrerons sur un exemple par la suite, nous avertissent d'une équivalence surprenante. Un pont gauche, défini et isolé grâce aux critères qui précèdent, est équivalent à deux bretelles portant chacune une demi-torsion.

a' - Si le pont est composé à une étoffe unilatère.

Dans ce cas, il n'y a jamais de demi-torsions effectives, comme nous le montrons dans ce qui suit.

Cette pratique des invariants apporte de la précision dans la définition de cet invariant sauvage qu'est la demi-torsion sur une bretelle. Nous savons maintenant dans quels cas nous pouvons en

parler de manière effective et intrinsèque. Dans tous les cas, les demi-torsions effectives peuvent toujours être présentées réparties sur des bretelles strictes, bretelles accrochées sur un même composant de bord.

Il y a toujours une présentation où le nombre de demi-torsions effectives est inférieur ou égal à deux.

Lorsque nous pouvons parler de demi-torsion effective sur un pont gauche, cette demi-torsion effective se répartie en deux demi-torsions effectives sur deux bretelles distinctes.

Pour étudier ce qu'il en est des ponts, à savoir s'ils sont tordus ou non, il y a quatre cas à considérer : deux lorsque l'étoffe, sur laquelle s'effectue le montage, est bilatère ; deux lorsqu'elle est unilatère.

a - Dans le cas d'une étoffe bilatère

Le disque troué est le prototype de l'étoffe bilatère à deux composants de bord.

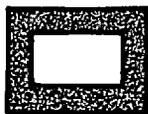


Fig. 23

• *Le pont effectivement non tordu.* Si nous ajoutons un pont non tordu entre deux composants de bord d'un montage d'étoffe bilatère, le montage obtenu reste bilatère.



Fig. 24

• *Le pont effectivement tordu.* Si nous ajoutons un pont tordu entre deux composants de bord d'un montage d'étoffe bilatère, le montage obtenu devient unilatère.

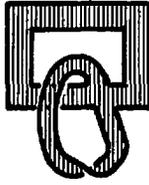


Fig. 25

Cela est à entendre quelle que soit la situation apparente (présence ou absence de demi-torsion apparente sur le pont ajouté). La désorientation d'une étoffe bilatère est un invariant qui indique le caractère effectivement tordu d'un pont.

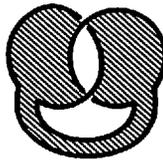
Donnons un critère comme dans le cas des bretelles (chap. III, p. 105). Si S est une étoffe bilatère, plane ou non, et P un pont ajouté à S comme il convient, P sera tordu ou gauche, c'est-à-dire équivalent à deux demi-torsions effectives sur deux bretelles, si et seulement si l'étoffe S et l'étoffe $S+P$ n'ont pas le même nombre de faces.

Cette remarque suffit pour décider du caractère tordu ou non tordu du pont.

Voici quelques exemples.



Une étoffe bilatère.



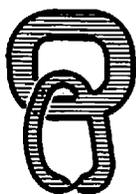
Une étoffe unilatère.
Le pont ajouté est
effectivement tordu.



Une étoffe bilatère.
Ce pont est non tordu,
la demi-torsion n'est
qu'apparente.

Fig. 26

Mais le plus surprenant est qu'un pont effectivement tordu provoque, dans le cas qui nous intéresse, deux demi-torsions effectives chacune ajoutée à une bretelle : le disque troué devient une bouteille de Klein trouée, comme nous le montrons par un changement de présentation.



Déplaçons la portion de disque le long du pont présentant une demi-torsion,

et faisons lui passer la demi-torsion.

Cela donne le schéma de la bouteille de Klein trouée, soit deux bandes de Möbius accolées.



Fig. 27

La présence de ces deux demi-torsions effectives, alors qu'il n'en paraît qu'une seule sur le carrefour de bandes initial, à la finesse d'un voile de tulle, tient à la présentation planaire des bretelles tordues que nous adoptons à la suite de Griffiths. Elle consiste en une présentation de la bouteille de Klein trouée faite de deux bandes de Möbius mises à plat, côte à côte.

a' - Dans une étoffe unilatère

La bande de Möbius trouée est le prototype de l'étoffe unilatère à deux composants de bord.

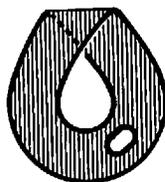


Fig. 28

Ici, le trait (l'invariant) de l'orientation de l'étoffe et du changement ou du maintien de l'orientation se perd puisque l'étoffe est dès le début unilatère. (Il est impossible de rendre cette étoffe bilatère en lui ajoutant des bretelles ou des ponts tordus ou non.)

• *Le pont sans demi-torsion apparente* placé entre deux composants de bord d'une bande de Möbius trouée donne une partie torique.



Fig. 29

Ainsi le montage équivaut à trois bandes de Mœbius composées d'après le théorème principal de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques (voir chap. II). Nous pourrions considérer que le pont non tordu apporte deux demi-torsions, apparaissant sur deux bretelles distinctes une fois mis à plat, si la présentation choisie n'était pas celle du nombre minimal de bretelles tordues mises à plat. Nous avons donc directement le schéma de Griffiths en lui-même.



Fig. 30

Nous pouvons donc dire que sur une étoffe unilatère un pont sans demi-torsion apparente est un pont non tordu.

• *Le pont avec demi-torsion apparente* entre deux composants de bord d'une bande de Mœbius trouée nécessite une autre lecture du montage pour que nous puissions décider de son caractère tordu ou non à l'aide de ce que nous avons déjà établi.

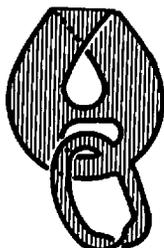


Fig. 31

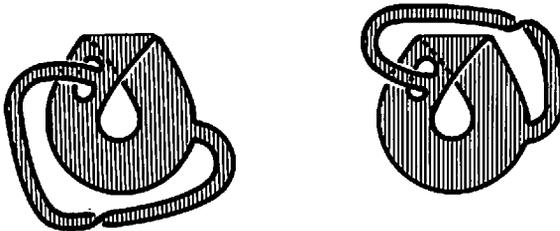
Il suffit de proposer une autre description de cet objet pour voir qu'il est fait de la composition d'une bretelle sur un même composant de bord d'une étoffe que nous pouvons décrire. Et de constater qu'il s'agit d'une bouteille de Klein trouée (dont le nombre de bord est un) sur laquelle est ajoutée une bretelle avec une demi-torsion apparente. Cette demi-torsion est effective puisqu'elle ne change pas le nombre de bord.



Fig. 32

Dans la bouteille de Klein trouée mise à plat il y a deux bretelles avec demi-torsion effective. Si nous y ajoutons une telle bretelle supplémentaire, l'étoffe en comporte trois. Le théorème principal nous assure qu'il s'agit alors d'une seule bande de Möbius composée avec un tore troué. Notre étoffe n'a donc qu'une seule demi-torsion effective sur une bretelle ajoutée sur un même composant de bord.

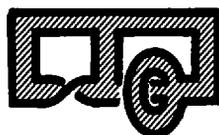
De manière rétroactive, nous pouvons déduire, en reconsidérant la description de départ de cette étoffe, où elle était construite comme une bande de Möbius avec un trou sur laquelle nous ajoutions un pont muni d'une demi-torsion apparente, que ce pont est non tordu. Du fait que la description du montage obtenu est celle d'une bande de Möbius composée avec une partie torique, sans autre demi-torsion effective que celle de la bande de Möbius trouée de départ. Ce que nous pouvons montrer par un changement de présentation.



Nous déplaçons le trou au bord duquel s'accroche le pont muni d'une demi-torsion apparente.



En passant le pli la demi-torsion du pont se défait.



Nous présentons l'étoffe suivant le schéma de Griffiths.

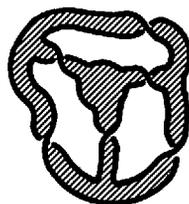
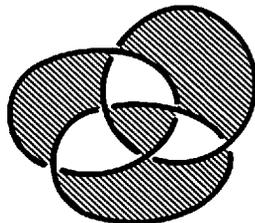
Fig. 33

Nous pouvons ainsi affirmer que, sur une étoffe unilatère, un pont avec demi-torsion apparente est un pont non tordu.

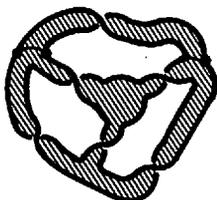
5. Démontage des étoffes selon leurs bretelles

Nous pouvons calculer l'intrinsèque d'une étoffe par un démontage de celle-ci. Il s'agit d'appliquer à rebours les résultats du chapitre III sur la présence ou l'absence de demi-torsions effectives sur une bretelle.

Prenons un exemple de la surface d'empan du nœud borroméen à trois ronds.



Cette étoffe peut se présenter, par déformation, comme une composition de bandes.



Choisissons une bretelle montée sur un même composant de bord de l'étoffe que nous obtiendrons en la retirant.

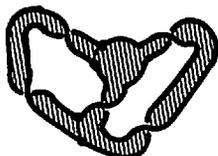


Nous obtenons une bretelle détachée et une étoffe ayant deux composants de bord.

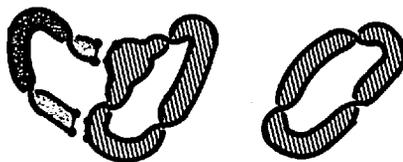
Fig. 34

La variation du nombre de bord nous indique que la demi-torsion de la bretelle retirée n'était qu'apparente puisque, ajoutée à l'étoffe obtenue, commune toile, elle provoque un composant de bord supplémentaire.

Poursuivons la décomposition.



En ôtant cette bretelle,



nous reconnaissons une étoffe composée d'une bande à trois demi-torsions et d'une bretelle à deux demi-torsions, que nous retirons.

Fig. 35

Par cette décomposition, nous passons d'une étoffe à deux composants de bord à une autre à un seul composant de bord. C'est que, inversement, la bretelle (à deux demi-torsions apparentes) ajoutée à la bande à trois demi-torsions est sans demi-torsion effective. La bande à trois demi-torsions est, de manière intrinsèque, une bande de Mœbius.

Nous pouvons conclure de cette décomposition que la surface d'empan du nœud borroméen, est de manière intrinsèque, un montage d'une bande de Mœbius et de deux bretelles sans demi-torsion, soit une bande de Mœbius à deux trous.

L'intrinsèque de la surface d'empan du nœud borroméen (voir chap. I).



Fig. 36

LA TOPOLOGIE DE SURFACE
DES SHÉMAS DE LACAN

Conclusion

Le mi-dit solidaire de l'étoffe

Fermeture des shémas à la surface du plan projectif

TROU IMAGINABLE

Nous pouvons, maintenant que le lecteur dispose des moyens de s'exercer à la pratique des surfaces topologiques intrinsèques, placer dans l'étoffe qui en supporte la fermeture, comme en une pièce de jacquard lisible, les shémas L et R, dont nous traitons dans l'Introduction (p. 18), puis le schéma I (E. p. 571).

Les schémas R et L, tracés par le Docteur Lacan, présentent, dans la structure du sujet, deux modes de composition distincts de la perception et de la conscience.

Le schéma I s'offre comme la structure du sujet au terme du procès psychotique.

L'étoffe du plan projectif supporte l'identification de chacun des trois schémas pris séparément, selon des éléments homologues qui se retrouvent en chacun d'eux (E. p. 553, note 1).

L'articulation des schémas de Lacan entre eux trouve alors sa raison à la surface de cette étoffe. C'est seulement lorsque nous sommes arrivés à disposer ces schémas dans cette situation qu'il s'établit, en raison, que le schéma L s'obtient à partir du schéma R par la rétraction de la zone \mathcal{R} , et, de même, qu'il est régulier de transformer le schéma R en schéma I, selon les indications données par le Docteur Lacan dans son écrit (E. p. 563). Car ces transformations d'entre les schémas, font appel à la logique de l'ensemble des trajets pertinents dans cette étoffe ; trajets que le Docteur Lacan a su lire puisqu'il les commente de manière stricte à tout bout de champ de son enseignement.

Nous plaçons ces schémas sur le plan projectif troué. Dans un premier cas concernant les schémas R et L, il est troué une fois ; dans un second cas, à propos du schéma I, il est troué trois fois. Nous y parvenons grâce à diverses présentations du schéma F dans le plan projectif troué deux fois. La fermeture d'un de ces deux trous organise la discussion des différentes présentations dans le premier cas ; un trou supplémentaire, et bien placé, conduit à la présentation du second cas.

Le trou imaginable comme rupture de surface trouve ici une fonction nouvelle. Un trou imaginable est nécessaire à la présentation du plan projectif plongé en trois dimensions, avec l'avantage de présenter une singularité qui est un manque, au lieu

que cette singularité soit un ajout tel que c'est le cas dans l'immersion. Maintenant le trou imaginable, désigné par des lettres, sert à la discussion de différentes présentations d'un même objet, avant que ces trous ne soient nommés explicitement par le Docteur Lacan. Cela permet d'élaborer le commentaire de la structure du sujet au cours du procès de la psychose, surtout si l'on sait déjà entendre ces trous se nouer par la suite de manière extrinsèque, et en quoi le nœud s'élide dans l'étoffe.

Les schémas L et R sont susceptibles d'être refermés sur le plan projectif non troué mais, comme nous ne dessinons pas de telles étoffes dans le corps de notre ouvrage — puisqu'elles ne peuvent être plongées dans l'espace supposé intuitif —, nous avons rejeté ces deux solutions dans l'Appendice (p. 323). Nous concluons cet ouvrage ici par la présentation de la fermeture des schémas R et L à la surface du plan projectif troué. Cette fermeture est donc partielle, mais ce qui lui manque est localisé avec précision.

1. Le schéma R refermé selon la surface du plan projectif troué

a - La figure à la fente transversale

Nous formons le plan projectif en partant du schéma F.

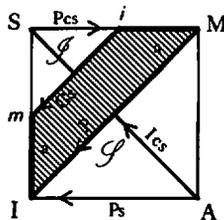


Fig. 1

A étirer de manière continue, vers le haut et vers la gauche, l'étoffe sur laquelle est tracé le schéma F, nous ne construisons pas un carrefour de bande selon le procédé le plus simple montré dans notre dernier chapitre.

Ici, nous déformons ces deux amorces de bretelles, toujours pour réaliser un carrefour de bandes tordues. Dans le procédé le plus simple, les côtés opposés du carré initial sont identifiés deux à deux, en respectant leur sens ou en l'inversant (tore, bouteille de Klein, plan projectif).

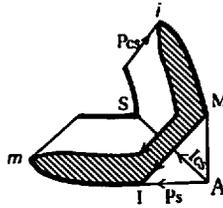


Fig. 2

Dans ce procédé plus compliqué, une portion seule des côtés participe à l'identification. Cela afin de suivre les indications de Lacan, lorsqu'il identifie les points i avec I , et m avec M , marqués sur le pourtour de son schéma.

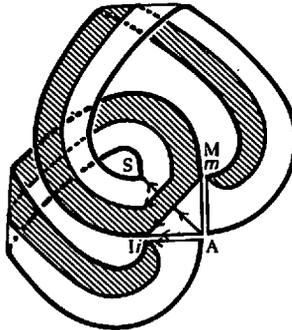


Fig. 3

Cette première solution est caractérisée par un curieux pincement en m et i de la zone hachurée.

Le Docteur Lacan a provoqué une tension entre l'identification des côtés d'un carré pour former un carrefour de bandes et son schéma R, en disposant les lettres et les zones de son schéma à sa manière. Nous montrerons plus loin la déformation du schéma nécessaire à la réalisation du carrefour de bandes tordues selon le procédé le plus simple. A partir de la disposition du schéma R, la réalisation du carrefour de bandes tordues est déformée. Dans les deux cas, la construction d'un plan projectif à partir d'un carré s'impose, et c'est l'art de Lacan d'y avoir introduit cette subversion où s'évoque toujours le procédé usuel qui lie le carré, comme un coupon pratique de shirting, au plan projectif.

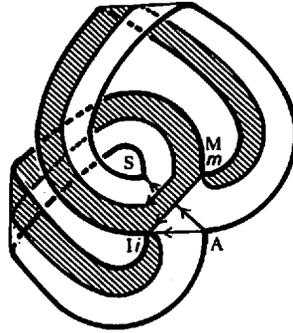


Fig. 4

L'aspect moins simple de cette solution tient aux conditions imposées aux lettres situées sur le bord du schéma.

Pour éprouver la situation de cette première solution, nous refermons un des deux trous de ce plan projectif deux fois troué (voir chap. VIII, p. 257). Pour cela déformons légèrement la figure en plaçant les deux bandes pliées de telle manière que l'une longe l'autre.

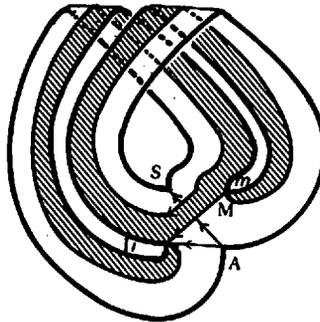


Fig. 5

Dans cette présentation de notre carrefour de bandes tordues, un composant de son bord apparaît comme cernant un trou imaginable dans une bande de Mœbius. Nous commençons à rétracter ce trou.

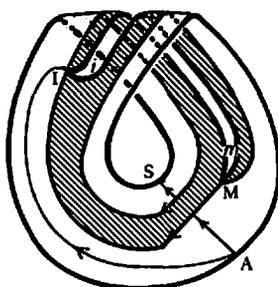


Fig. 6

Les lettres du schéma F suivent cette déformation de manière continue. Jusqu'à ramener ce trou à sa plus simple expression.

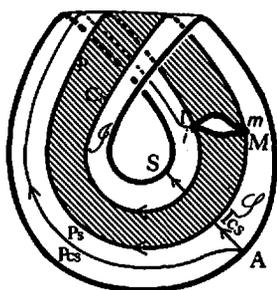


Fig. 7

Où nous pouvons bien voir qu'il est en effet un trou dans une bande de Mœbius.

Cette bande de Mœbius trouée présente la particularité de porter un trou, en travers de la zone hachurée : nous le nommerons à l'aide des quatre lettres *I*, *i*, *m*, *M*. Cette zone hachurée est précisément la zone la mieux identifiable dans le schéma F de départ, comme étant une bande de Mœbius, selon l'indication donnée par Lacan à propos du schéma R. Nous refermons ce trou encore présent dans notre dernier dessin, afin d'achever l'identification des côtés du schéma F. Celui-ci impose la répartition des lettres en deux couples (*I*, *i*) et (*m*, *M*), puisqu'ils désignent deux points distincts, et que leurs lettres respectives désignent maintenant un même point. Ce trou apparaît alors, dans notre dessin, comme une fente tendue entre ces couples en travers d'une bande de Mœbius. La composition de Perception et Conscience est réalisée en la succession de ces deux arêtes qui forment ensemble un huit intérieur effectuant un double tour dans le plan projectif.

Lorsque la fente sera refermée, il ne restera plus qu'un trou dans le plan projectif, c'est le point désigné par les lettres S et A. Que ce point soit ici le lieu d'un trou à la surface du plan projectif ne fait pas nécessairement obstacle à l'identification des flèches AI et Si. Ces flèches sont respectivement les Perception-signes et le Préconscient de Freud. Nous n'avons pas réalisé leur identification dans le dessin de cette première solution de fermeture du schéma F, comme nous le ferons plus loin. Cette première solution n'est ici qu'esquissée afin de la comparer aux suivantes.

Il faut noter de plus que, pour la première fois grâce à notre schéma F, les deux triangles du schéma R s'avèrent être les deux faces opposées d'une bande bipartie, telle une ceinture de percaline, dont l'un des composants de bord est cousu le long de la zone \mathcal{R} du schéma fermé en bande de Mœbius.

a' - La figure non immédiate

Repartons du schéma F pour proposer une autre solution. Nous commençons, cette fois, par identifier la zone hachurée en une bande de Mœbius. Nous suivons par-là les indications données par le Docteur Lacan dans sa note de 1966. Perception et Conscience se composent en un double tour qui confirme l'orientation de notre schéma F. Les points I, *i* et M, *m* sont identifiés.

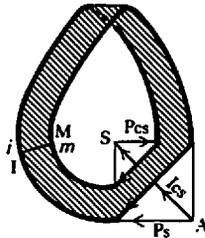


Fig. 8

Il reste maintenant à identifier les autres portions du bord de ce schéma, de manière à convenir à la cohérence de l'ensemble devant aboutir à un plan projectif, car "ce que le schéma R étale, c'est un plan projectif" (E. p. 553, note 1). Etirons de manière continue, en leur donnant un aspect quadrangulaire, les deux triangles qui, sous leur face visible, sont \mathcal{J} et \mathcal{S} .

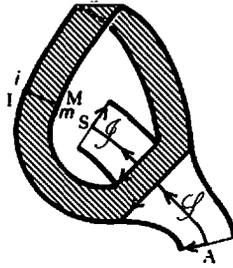


Fig. 9

L'épaisseur du trait indique d'où provient chaque portion de bord. Les traits gras sont des points qui s'étirent en des lignes qui composent le bord de notre étoffe trouée au lieu de ces points. Ces trous sont des points du plan projectif non troué. Mais dans nos dessins, dans le plan projectif troué, ils sont des composants du bord.

Puis nous refermons nos deux triangles en une bande présentant une demi-torsion, où il s'avère qu'ils s'opposent comme les deux faces d'une étoffe. Les points S et A n'en forment plus qu'un seul, il faut noter que les flèches AI et Si sont identifiées à cet instant en une même arête conjoignant les Perception-signes et le Préconscient de Freud.

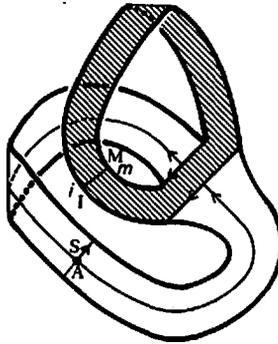


Fig. 10

Alors le schéma F est refermé car ses éléments sont identifiés entre eux et identifiables à la surface du plan projectif, moyennant que l'on sache que les trous sont des points de cette surface topologique fermée.

Pour le vérifier, nous soulevons maintenant la question de la fermeture de l'un ou de l'autre des composants de bord de ce plan projectif à deux trous. Nous disposons la dernière bretelle tordue,

celle qui vient d'être constituée, de manière qu'elle longe la bande de Mœbius de la zone hachurée.

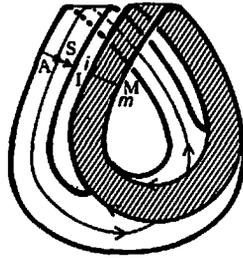


Fig. 11

Dans cette nouvelle présentation, le composant de bord cernant le trou Ii , apparaît mieux comme un trou imaginable dans une bande de Mœbius dont le trou mœbien est le point mM . Le trou sphérique tend à se fermer en un point iI .

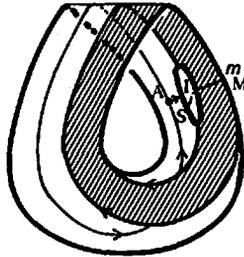


Fig. 12

Nous achevons cette transformation en refermant le trou iI .

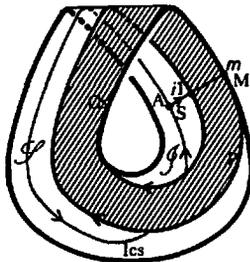


Fig. 13

Il s'agit encore cette fois d'une solution surprenante où la bande de Mœbius hachurée, comme un fichu de madras, n'est pas médiane. Il nous faut expliquer cet état.

1 - Première figure médiane

Nous montrons que cette solution correspond encore à une bande de Mœbius dont la zone hachurée constitue la coupure médiane, celle-ci étant élargie. Pour cela nous faisons un trou quelconque dans la zone bilatère $\mathcal{S}\mathcal{J}$ — ici dans la face visible \mathcal{S} , dans le bas de la figure.

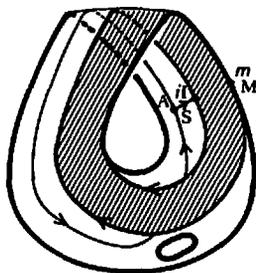


Fig. 14

Ce trou ne correspond à aucun couple de lettres du schéma F. Elargissons ce trou en prenant soin de ne pas rencontrer les lignes du schéma, nous allons échanger les fonctions du trou mœbien et de ce trou sphérique (voir chap. VIII, p. 259).

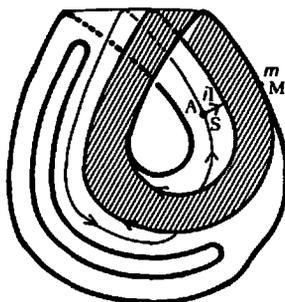


Fig. 15

Nous agrandissons encore ce trou. Puis nous lui faisons passer le pli de la bande de Mœbius, dans la figure suivante.

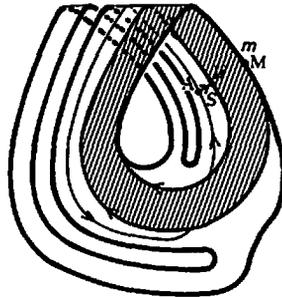


Fig. 16

Ensuite, une première transformation d'immersion permet de faire passer une bretelle, définie par la déformation du trou, par-dessus la zone hachurée.

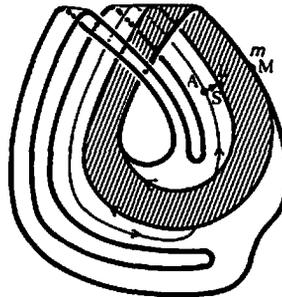


Fig. 17

Il est alors facile de déplacer cette bretelle pliée de la gauche vers la droite...

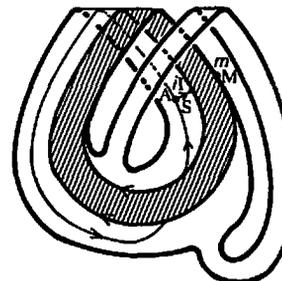


Fig. 18

... après lui avoir fait décrire un tour complet par l'extérieur de la figure. Nous réduisons le trou sphérique qui apparaît maintenant, comme dans notre chapitre VIII.

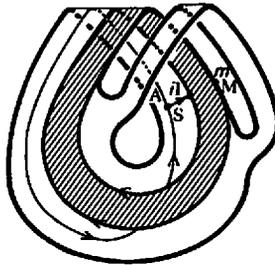


Fig. 19

Il commence à se voir que ce trou cerne le point mM , et nous prolongeons cette réduction de la taille du trou...

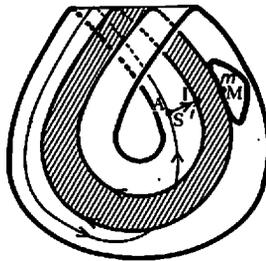


Fig. 20

... jusqu'à le fermer en ce point mM .

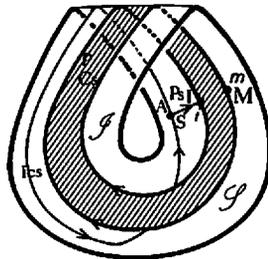


Fig. 21

Où nous constatons qu'il s'agit bien d'une bande de Möbius dont la zone \mathcal{R} , elle-même une bande de Möbius, est la zone médiane. Mais où, contrairement à la première solution esquissée, le trou mœbien n'est pas le point SA . Ce trou n'est ici qu'accessoire, destiné à plonger le plan projectif dans notre espace et ainsi à l'offrir au regard sans autre singularité que ce trou.

Cette figure est la première où nous pouvons lire les conséquences de l'identification des côtés du schéma F , donc du schéma R . Les points de ce schéma y sont disposés comme à la surface du plan projectif et la zone \mathcal{R} hachurée y est cernée par le double tour de façon à résoudre la tension produite par le Docteur

Lacan entre son schéma R et la fermeture usuelle du carré en un plan projectif.

Pour montrer qu'il s'agit toujours de la solution donnée dès le premier cas, nous reprenons l'échange du trou mM avec un trou qui n'a pas de nom, en un échange du trou mM avec le trou SA, dans la fonction du trou mœbien.

2 - Deuxième figure médiane

Repartons de la figure 13 (p. 284), où nous ouvrons un trou sphérique au point SA.

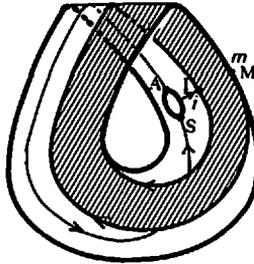


Fig. 22

Nous agrandissons de manière continue la taille de ce trou...

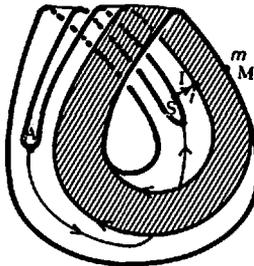


Fig. 23

... et obtenons un carrefour de bandes pliées...

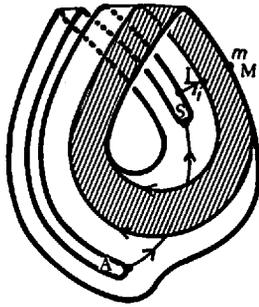


Fig. 24

... dont l'une traverse, par immersion de l'étoffe, l'autre bretelle et passe maintenant au-dessus de la zone hachurée.

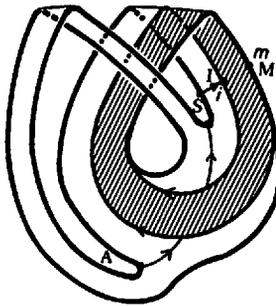


Fig. 25

Cette bretelle passe de gauche à droite de notre dessin.

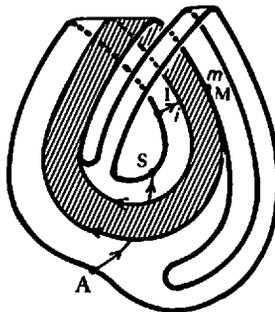


Fig. 26

Puis nous rétractons le trou sphérique qui s'est formé à l'occasion de ces déformations, et nous constatons que nous sommes en présence d'une bande de Möbius trouée en mM.

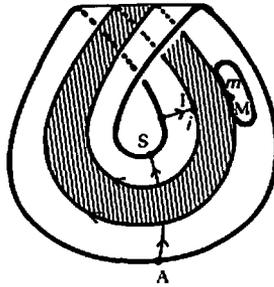


Fig. 27

Le trou mM se referme pour donner une bande de Mœbius, dont la zone \mathcal{R} est la zone médiane et dont le trou périphérique et central est le point SA.

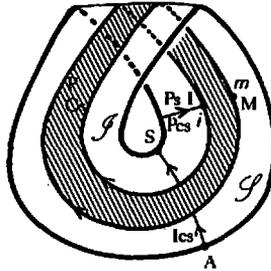


Fig. 28

Nous donnons maintenant une troisième solution de l'identification des côtés du schéma F, en repartant une nouvelle fois de ce schéma. C'est la solution la plus simple de la construction d'une bande de Mœbius à partir d'un carré : elle aboutira au même résultat que le dernier rencontré.

a" - La figure transverse

La construction la mieux connue de la bande de Mœbius (voir chap. VII, p. 239) correspond à l'identification de deux côtés opposés d'un carré dont on a inversé le sens. Ici, dans le cas du schéma F, lorsqu'il provient du schéma R, la difficulté tient à ce que le Docteur Lacan donne des indications à propos des seuls points i , M , m , I placés de biais sur le schéma.

Plutôt que d'obtenir des carrefours de bandes surprenants, nous surprenons les lecteurs habitués à la présentation du schéma R en déformant de manière continue notre schéma F. La construction

que nous réalisons maintenant a déjà été montrée dans le cas général (chap. VII, p. 239). Comme nous l'expliquions alors, nous déformons les deux coins S et A du carré que forme le schéma F. Ces points élargis nous permettent de situer la place de la pastille sphérique qui peut venir s'ajouter à la bande de Mœbius pour la fermer en plan projectif.

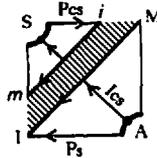


Fig. 29

Le périmètre de ce disque est déformé, comme nous le faisons dans notre texte, pour obtenir une figure carrée qui se prête de façon plus directe à l'identification de la bande de Mœbius.

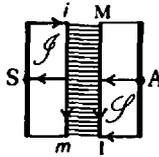


Fig. 30

Pour identifier les points i , I et m , M , selon l'indication de Lacan, nous les présentons face à face après avoir effectué une demi-torsion.

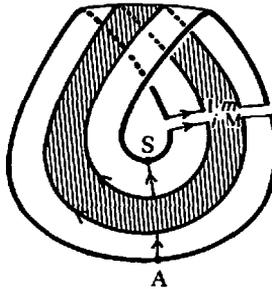


Fig. 31

Cette situation donne le résultat déjà obtenu dans la figure 28.

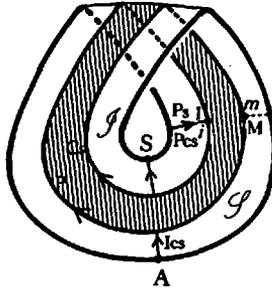


Fig. 32

Ces trois modes d'identification du schéma F sont équivalents entre eux comme nos différentes monstrations l'établissent. Il suffit toujours d'admettre que la bande de Mœbius est le plan projectif troué une fois. L'équivalence des solutions obtenues se vérifie pour le plan projectif réel. Ces solutions de la fermeture du schéma d'une même et unique manière se distinguent en tant que plongements différents du plan projectif, au moyen de trous pratiqués en des points différents de cette étoffe. Nous ouvrons et nous fermons les trous indifféremment ; seul un trou mœbien est maintenu nécessairement afin de réaliser le plongement. Il s'agit du mode unique de fermeture du schéma R à la surface du plan projectif.

Dans la figure 7, le trou mœbien est en SA et il y a un autre trou le long du segment Im ou iM , comme on voudra.

Dans la figure 13, le trou mœbien est en mM .

Dans la figure 21, le trou est dans la pastille sphérique (c'est une zone bilatère dont les faces sont l'Imaginaire et le Symbolique du schéma R). Ce trou a été pratiqué dans la figure 14 dans la zone visible δ . Il faut savoir que cette face est adossée à la zone \mathcal{J} que le même trou perce donc aussi.

Dans la figure 28 le trou mœbien est pratiqué au point SA.

De même dans la figure 32.

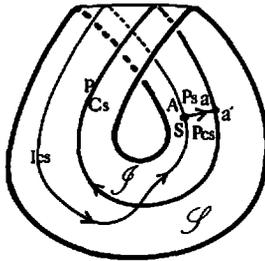
2. Le schéma L refermé selon la surface du plan projectif troué

a - La rétraction

Le schéma R étant fermé à la surface du plan projectif troué deux fois, la fermeture d'un de ces deux trous nous montre comment il peut être disposé fermé à la surface d'une bande de Mœbius. Nous en déduisons le mode de fermeture du schéma L dans cette même étoffe.

Dans notre schéma F, la zone \mathcal{R} interrompt le trajet (AS) qui, depuis Freud et chez Lacan, est l'arête Ics de leurs schémas. Ce circuit Ics n'est pas tracé dans le schéma R mais peut y être lu : nous l'avons déduit du schéma L grâce à notre schéma F. Nous comprenons maintenant comment ce circuit Ics peut se fermer dans le schéma L. A rétracter la zone \mathcal{R} de sorte que Perception et Conscience se traversent (*im*, IM) alors que ces deux vecteurs sont dans le prolongement l'un de l'autre à la surface du plan projectif pour former le bord unique de la zone \mathcal{R} , la seule coupure concevable à double tour dans le schéma R. Dans le schéma L, la coupure à double tour se traverse et forme alors le tour unique, la coupure impensable médiane de la bande de Mœbius. La place différente du trou mœbien dans le plan projectif donne deux solutions équivalentes.

Dans le cas de la figure 21, nous obtenons :



(voir E. p. 429)
Fig. 33

Dans le cas des figures 7, 28 et 32, la rétraction donne :

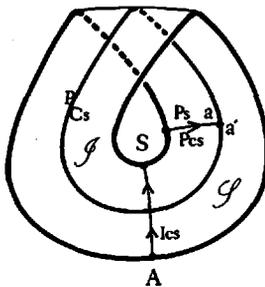


Fig. 34

Ces deux dernières figures présentent la fermeture du schéma L à la surface du plan projectif troué une fois, chacune en un point différent. Ici nous pouvons lire ce que Lacan enseigne de la situation analytique. Elle ne s'établit pas seulement de deux sujets en présence, mais de quatre termes nécessaires : le Sujet et l'Autre, pourvus de deux objets, le moi et l'autre (E. p. 429). Sur la figure 33, plus facilement que sur la figure 34, nous lisons d'où viennent

ces quatre termes dans le schéma L étalé. Dans la structure ce sont les éléments (S, A) et (a, a') qui se scindent, et l'achèvement de l'analyse s'obtient à faire assumer au sujet cette solitude avec son autre. En cet état, de traversée de la perception et de la conscience, le circuit de l'inconscient est fermé.

3. Le schéma I produit de la surface du plan projectif troué

a' - La caricature : le passage du schéma R au schéma I

Prolongeons cette fermeture du schéma R pour montrer comment se ferme le schéma I (E. p. 571) à la surface du plan projectif.

Il est produit par la déformation du schéma R qui fait passer le Créé I à assumer la place laissée vacante de la Loi en P (E. p. 563). Ceci afin de rendre compte du délire de Schreber jusqu'à aboutir à une caricature de la structure.

Pour effectuer cette déformation, il faut savoir que nous devons pratiquer un trou aa' dans la zone \mathcal{R} , comme cela se vérifie au cours de la monstration. Les trous P_0 et Φ_0 se sont formés respectivement dans le Symbolique et l'Imaginaire, et une partie du schéma contourne le trou P_0 , amenant I du côté où se trouvait P.

Rappelons que dans le schéma R, le point P était situé à la place noté A. L'effet de la carence signifiante à cet endroit produit un rictus de la structure entre I et A.

Le schéma I est présenté comme un schéma R percé de trois trous. Le Docteur Lacan ne dit rien du trou aa' dans son écrit de 1956, laissant "quelque chose à pénétrer aux glossateurs de l'avenir" (E. p. 580).

Ce trou aa' est essentiel dans le passage du schéma R au schéma I, et dans la discussion de la correspondance des deux trous P_0 et Φ_0 . C'est à propos de cette correspondance qu'est posée la question préliminaire au traitement des choses psy (la psychose pour les arriérés restant sous-développés d'être les sujets qui supportent notre culture industrielle).

Il convient de répondre à la question de savoir si le trou Φ_0 (dans l'Imaginaire) est l'effet du trou P_0 (dans le Symbolique) (E. p. 571) — c'est-à-dire si la répulsion produite par la castration est liée à un défaut relatif au traitement, par le langage, de l'impossibilité de dire grâce à une métaphore ; ou s'il est l'effet de l'éliision du phallus ramené par le sujet à la béance mortifère du stade du miroir pour résoudre en un second degré cette béance dans l'Imaginaire (E. p. 571) — c'est-à-dire si la crainte de la

castration est seulement la conséquence de la prématuration humaine.

Il est faux que ce ne soit pas le deuxième terme de cette alternative, mais il peut bien même être acquis, il reste qu'il est faux que nous ne devons pas répondre à son premier terme par l'affirmative, et ainsi les coordonner. Cela revient à interroger l'articulation du phallus et de la métaphore paternelle.

Le phallus est un terme de la tradition, mais c'est le signifiant de l'opération de l'absence de la mère. C'est sous l'aspect du père mort, du fait de sa disparition à son fondement, que le père devient le signifiant qui métaphorise le phallus. C'est cet acte qui fait défaut dans le cas de Schreber.

Or nous disions, dans le chapitre premier, que la fonction paternelle se noue, en premier, entre les sommets I et A du schéma R, lieu du jugement d'attribution, soit le segment où se distinguent les Perception-signes de la Perception (E. p. 558). Reprise dans le jugement d'existence, cette distinction relève, à cette étape de l'enseignement de Lacan, du fonctionnement d'ensemble de ces schémas et de ces étoffes : c'est la fonction du trait unaire, le profil de sa structure de trait comme une coupure.

La fonction de ce trait n'est pas inerte, elle se trouve primordiale dans l'acte de l'écriture et de son corrélat, celui de la lecture. Il s'agit bien de la pratique de cette structure qui consiste à disjoindre dans une conjonction, à réunir en séparant.

Suivons maintenant les déplacements de a et de a' d'entre ces schémas, pour y lire que corrélativement au contour du trou P_0 par I, pour venir occuper la place de P, il se produit un contour par i du trou Φ_0 , i venant occuper la place laissée vacante du phallus et provoquant une boursouffure de la personnalité qui se règle sur ce petit i Autre très peu fraternel.

Reprenons notre construction à partir du schéma R marqué de trois trous. Ce sont P_0 , Φ_0 et aa' .

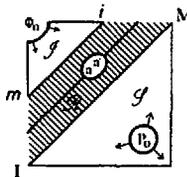


Fig. 35

Identifions ce schéma troué en une bande de Möbius, comme nous l'avons fait du schéma F, et par conséquent du schéma R, aux figures 28 et 32. Il se présente ainsi, toujours percé des mêmes trous.

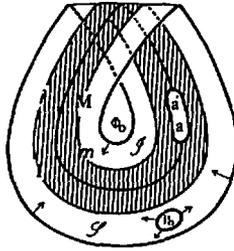


Fig. 36

Nous avançons que dans le schéma I le plan projectif est troué trois fois, et nous montrons la nécessité de ces trois trous en effectuant la transformation produite au cours du délire, pour aboutir au "schéma de la structure du sujet au terme du procès psychotique" (E. p. 571).

Nous utilisons dans cette figure un quelconque de ces trous, ici Φ_0 , comme trou mœbien. Et c'est en échangeant les trous Φ_0 et aa' (voir chap. VIII, p. 259), dans cette fonction qui permet de réaliser le plongement de la structure percée, que nous obtiendrons le schéma I.

Nous déformons le trou aa' , de manière à lui faire passer la ligne de pli en haut de la figure.

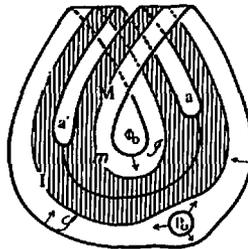


Fig. 37

Nous prolongeons cette déformation en étendant encore l'aire du trou aa' .

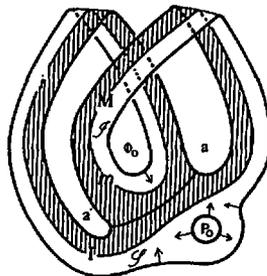


Fig. 38

Le créé I peut alors passer de la gauche à la droite de la figure, contournant en dessous le trou P_0 , pour venir occuper la place P (E. p. 563).

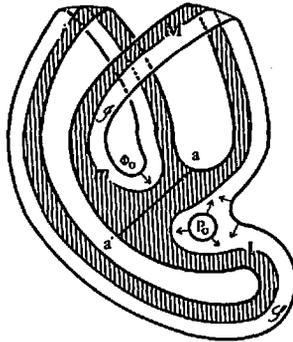


Fig. 39

Puis nous retournons la bretelle allongée sur la gauche de la figure pour la faire passer du côté droit. Nous obtenons la situation suivante, déjà très proche de la fermeture du schéma I.

Le fait que le trou aa' soit dans la zone \mathcal{R} hachurée n'est pas indifférent pour aboutir à la double courbe de l'hyperbole qui se révèle être un unique cercle plongé dans le plan projectif. Il s'agit du traitement des coniques qui, avec Desargues, a bien changé depuis les Grecs.

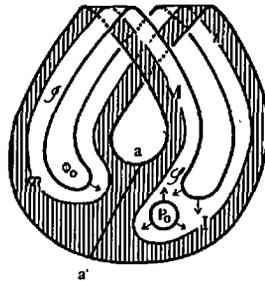


Fig. 40

Nous pouvons suivre ce changement de présentation en remarquant que si les points P_0 , Φ_0 et aa' n'ont pas changé de place — aa' n'a été qu'agrandi —, ils commencent à changer de fonction.

Mais le trou Φ_0 ne peut pas encore être fermé en un plongement simple dans cette situation.

Nous pratiquons une transformation d'immersion sur cette figure à faire passer l'une des bretelles du carrefour au-dessous de l'autre alors qu'elle passait au-dessus.

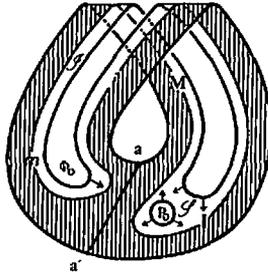


Fig. 41

Cela se lit dans le haut de la figure, à la hauteur du losange situé au-dessous des lignes de pli. Et c'est par la rétraction du trou Φ_0 , devenu un trou sphérique, qui a été remplacé dans sa fonction mœbienne par le trou aa' , que nous obtenons le schéma I, fermé comme il convient pour une hyperbole et ses asymptotes à la surface du plan projectif. Ici le plan projectif est troué en une bande de Mœbius plongée dans l'espace trois.

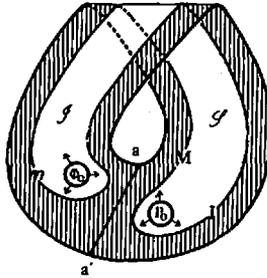


Fig. 42

Nous lisons dans le bas de cette figure le schéma I (E. p. 571) qui se révèle être un détail de notre dessin précédent.

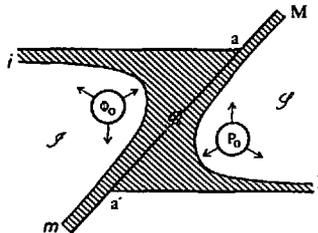


Fig. 43

Notre présentation du schéma I à la surface du plan projectif réalise l'identification indiquée dès le schéma R des points li et mM . C'est à faire circuler ces points sur les branches d'hyperbole achevée qu'ils se regroupent, i avec I et m avec M .

Ces fermetures des schémas corrélatives de coupures et d'ouvertures se produisent sur les parois d'une bien curieuse caverne, en manchon de pilou au rare usage. Nous dirons en logique, à projeter les opérateurs de cette mathématique dialectique avec laquelle il faudra bien se familiariser, en quoi l'effacement, l'indistinction, sont nécessaires à ces renversements. Dans le cas de Schreber, la présence du trou aa' dans la zone \mathcal{R} hachurée en limite le fonctionnement, la rétraction : le mode de fermeture de l'inconscient ne peut pas se produire. C'est par cet effacement, cette rétraction que cette topologie ne sera jamais touristique, le sujet qui s'y voue se doit de constamment la réassumer, elle est la seule sévérité qui tienne, le tranchant de la vérité. Pour notre part nous considérons que cette position n'est pas inaccessible et c'est pourquoi nous en proposons dès maintenant l'étude. L'impossible de cette structure nous livre le profil de son fonctionnement. D'être structure de langage, d'avoir effet de parole, le sésame de l'inconscient n'est pas insoluble, mais exige de l'analyste qu'il revienne sur le mode de sa fermeture (E. p. 838). Lacan a prélevé dans les indications de Freud les éléments de sa topologie sous l'aspect de "béance, de battement, d'alternance de succion". Nous avons ramené les parois de la caverne au plus près d'une combinatoire d'éléments limités où la fonction de bord joue dans ce qui se ferme.

LA REPRÉSENTATION DANS LA TOPOLOGIE

Appendice

Eléments pour une théorie de la représentation et de l'objet

chapitre I

L'absence et le puits

Topologies à la surface du plan projectif

Comme nous l'expliquons avec précision dans l'Appendice du fascicule n° 1, entreprendre une étude de la topologie du plan projectif, c'est définir :

a) un espace (une multiplicité),
et b) les opérations topologiques (continues) permises dans cet espace.

De la définition de ces transformations se déduisent pour les objets (sous-espaces) des invariants qui les caractérisent.

Le plan projectif réel ne peut pas être plongé dans l'espace de dimension trois, c'est dire qu'il ne peut être représenté en tant que tel (voir chap. II). Nous ne pouvons pas le choisir comme multiplicité de notre topologie puisque nous voulons la présenter par des dessins ou des modèles constructibles. Différents modèles (réalisations) constructibles dans l'espace de dimension trois, donc représentables, peuvent remplir l'office de la multiplicité nécessaire à la bonne définition de notre topologie du plan projectif à condition que les transformations définies au sein de cette multiplicité correspondent à des transformations définies dans le plan projectif réel.

Nous allons restreindre notre investigation de la topologie du plan projectif réel à la topologie de deux types d'objets de cet espace. Ce seront :

1. a - la topologie des trajets fermés dans le plan projectif (plongement de cercles dans le plan projectif) ;

et a' - les déformations isotopiques (continues) de ces trajets.

2. a - la topologie des coloriages des faces d'une étoffe qui aurait la structure du plan projectif;

et a' - le protocole de coloriage correct pour la topologie du plan projectif.

Pour les besoins de la représentation, plusieurs réalisations (modèles, en tissu de lin si l'on veut) du plan projectif peuvent servir de multiplicité. Nous en considérons deux : le cross-cap (ou bonnet croisé) et la bande de Mœbius. Parce que soumises à des

transformations convenables, elles rendent compte rigoureusement de la topologie du plan projectif réel.

Le plan projectif réel en lui-même existe pour sa part indépendamment (nous n'en parlerons pas autrement qu'au travers de ces réalisations soumises à des contraintes précises). Le plan projectif réel est un être mathématique défini par une série d'expressions mathématiques. Cet espace s'écrit, ce qui lui assure une consistance réelle. Mais il est impossible de le voir ou de le réaliser en tant que tel dans l'espace de dimension trois. Certains physiciens peuvent nous dire que pour certains phénomènes physiques l'espace physique a la structure du plan projectif réel. Il ne s'agit pas de notre espace mais de l'espace dans lequel s'effectuent les phénomènes corpusculaires en question. Notre espace peut être le plan projectif réel si nous posons que notre espace est celui du langage. Les contraintes imposées au signifiant par le signifiant donnent au langage la structure d'un plan projectif réel. Le champ freudien présente cette structure à condition qu'il ne soit pas laissé en plan, qu'y soit effectué quelque acte.

1. Topologie des trajets soumis à des déformations continues à la surface du plan projectif réel

Nous utiliserons comme espace d'effectuation de cette topologie du plan projectif réel, la multiplicité que constitue la surface mathématique qui présente une ligne dite d'immersion (ligne de points multiples, ligne de points singuliers ou de recoupement) : nous l'appellerons ligne de représentation car elle ne sert qu'à représenter cette structure au monde de dimension trois. Nous appelons cross-cap (ou bonnet croisé)¹ cette étoffe constructible en dimension trois, à partir par exemple d'une nappe de nankin.

Il s'agit simplement d'une sphère pincée ou cousue le long d'une ligne de manière partielle.

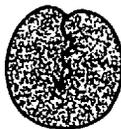


Fig. 1

Nous discuterons de la construction de cette étoffe dans le second chapitre de cet Appendice. Attardons-nous pour l'instant sur cette fameuse ligne de points multiples, singularité effective

1. Certains appellent cross-cap cet objet percé d'un trou soit, d'après notre chapitre II, une bande de Mœbius immergée. Or la bande de Mœbius peut être plongée dans l'espace de dimension trois. Ainsi nous ne voyons pas l'intérêt de consacrer une étude à une de ces immersions (voir Georjgin, *Littoral* n° 17, p. 164).

dans le cross-cap (cet ensemble de points singuliers n'existe pas dans le plan projectif réel). Cette étoffe n'est donc pas de celles que nous étudions dans ce fascicule où nous nous en sommes exclusivement tenus aux étoffes plongées dans l'espace de dimension trois. Au voisinage de cette ligne de points singuliers (ou multiples) du cross-cap, ligne que ne présentent pas les étoffes plongées, l'étoffe se comporte localement comme un dièdre c'est-à-dire *l'intersection de deux nappes d'étoffe*.

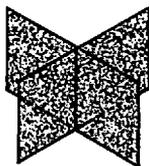


Fig. 2

Dans son ensemble il s'agit pour le cross-cap d'être la fermeture originale et spécifique d'un dièdre.

Pour que le lecteur se fasse une bonne description de cette multiplicité initiale, nous montrons le cross-cap coupé le long d'une courbe qui rencontre cette ligne singulière.

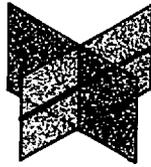


Fig. 3

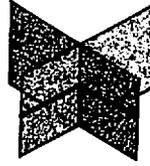
Le profil de la coupure qui définit deux bords sur chacune des deux moitiés est un 8. La ligne singulière est simple, il n'y faut pas voir de complication, mais il faut bien entendre que sa description reste bien en deçà pour la présentation de la topologie du plan projectif réel tant qu'elle n'est pas accompagnée d'un protocole d'usage précis.

a - Objets

Pour présenter cette topologie, il nous faut à propos d'objets (sous-espaces) de cet espace préciser qu'ici nous ne considérons que les trajets fermés solidaires de l'étoffe du cross-cap qui respectent localement, le long de la ligne de singularité, la nappe du dièdre qu'ils suivent.



Trajet admis.



Trajet rejeté.

Fig. 4

En d'autres termes, lorsqu'un trajet rencontre la ligne de singularité en l'atteignant le long d'une nappe d'étoffe :

O_1 - il doit poursuivre son parcours sur la même nappe en traversant l'autre nappe d'étoffe et surtout en ne l'empruntant pas (voir fig. 4) ;

et O_2 - ce trajet ne se recoupe lui-même qu'au passage de cette ligne (immersion du cercle à la surface du cross-cap).

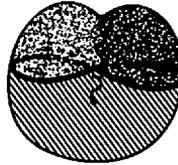


Fig. 5

Les trajets immergés de cette manière stricte à la surface du cross-cap le sont dans l'espace R^3 , où est construit le cross-cap. Ils correspondent aux trajets plongés dans le plan projectif réel.

a' - Transformations

Les transformations que nous faisons subir à ces trajets sont des déformations continues qui laissent les trajets solidaires de l'étoffe, comme ses côtes le sont du soyeux.

T_1 - Ces transformations obligent les trajets lorsqu'ils rencontrent la ligne de singularité, étant portés par une nappe du dièdre local, à traverser l'autre nappe.

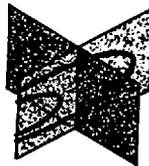


Fig. 6

Ces trajets ne peuvent pas emprunter l'autre nappe.

T₂ - Ces transformations n'autorisent les trajets à se traverser eux-mêmes qu'à l'occasion de points communs qu'ils auront avec la ligne de singularité.

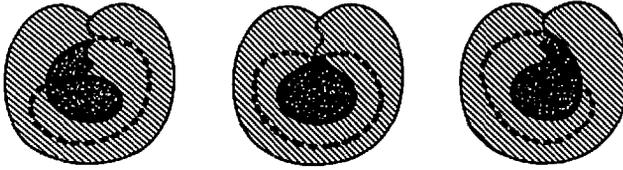


Fig. 7

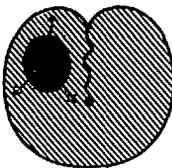
Nous laissons à une étude des singularités d'immersion, qui n'est pas notre propos ici, la question de la différence que peuvent présenter les deux points d'extrémité de cette ligne de singularité. Avec ce que nous avons dit, les trajets se comportent de manière à ne pas quitter l'étoffe au voisinage de ces deux points comme ils ne quittent jamais l'étoffe en aucun point.

Nous disons ces transformations être des transformations d'immersion ou d'homotopie des trajets sur le modèle immergé qu'est le cross-cap.

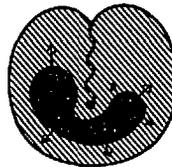
Une fois pourvus de ces précisions, nous pouvons effectuer la transformation (d'un cercle à la surface du cross-cap dans cette topologie du plan projectif) qui sera une transformation topologique dans le plan projectif. Cela nous permettra d'en approcher la structure par le dessin. Il s'agit alors d'un bon modèle et d'une bonne simulation.

En partant d'un point hors ligne

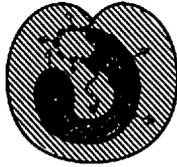
Etudions l'extension d'un cercle autour d'un point, en prenant bien soin de mettre le point hors la ligne de singularité.



(0) Les flèches indiquant l'extension sont utilisées par le Docteur Lacan dans le schéma I, marquées au bord des trous Φ_0 et P_0 (E. p. 571).



(1) Nous effectuons une déformation du cercle.



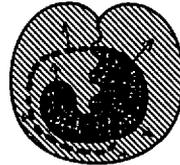
(2) Notre cercle rencontre la ligne de singularité et traverse la nappe d'étoffe (transformation respectant le critère T_1). Les pointillés indiquent que le cercle s'étend sur la nappe qui est de l'autre côté et non visible du cross-cap.



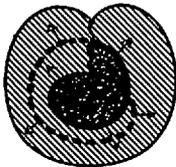
(3) La transformation se continue.



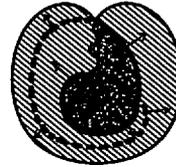
(4) Nous amenons une intersection du trajet avec la ligne de représentation au point d'extrémité de cette ligne de singularité.



(5) Nous faisons tourner notre trajet de manière continue et restant solidaire de l'étoffe autour de ce point d'extrémité.



(6) Le point d'intersection de notre trajet et de la ligne de représentation se sépare du point d'extrémité².

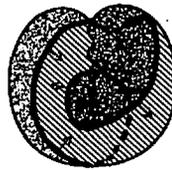


(7) Nous faisons la même opération que précédemment vers le haut. Le trajet passe maintenant par l'autre extrémité de la ligne de singularité. Une partie en pointillé qui poursuit derrière le cross-cap va pouvoir venir vers l'avant dans le dessin suivant.

² Le même dessin se trouve en position inversée dans *Scilicet 2/3*, p. 130, fig. 15.



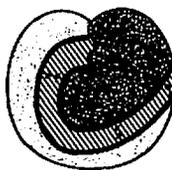
(8) En passant vers l'avant, cette partie qui était en pointillé est maintenant en trait plein (en haut de la figure à gauche).



(9) Mais il faut que la partie qui était en trait plein sur la face visible passe derrière en pointillé (en haut, à droite) pour que le trajet puisse ensuite quitter le point d'intersection supérieur en respectant le critère T_1 , c'est-à-dire en restant solidaire de la même nappe du dièdre.



(10) Le trajet se sépare du point d'extrémité en se déplaçant vers le bas.



(11) Par prolongement de la transformation continue, nous voyons notre cercle se disposer en huit intérieur.

Fig. 8

Ce huit intérieur découpe dans l'étoffe une *bande de Mœbius*. Le reste de l'étoffe, si le lecteur a suivi continûment nos transformations, est l'extension du *disque* délimité par notre trajet dans la situation d'où nous étions partis (dessin 0). Inversement, si nous comparons la situation présente (dessin 11) au dessin de départ, la partie qui entoure le disque en question (dessin 0) s'avère être une bande de Mœbius. Le plan projectif se compose donc de deux parties hétérogènes dans leur structure : un disque et une bande de Mœbius. Ce qui ne se voit pas facilement dans une figure unique mais se déduit de la répartition que l'on peut voir entre nos deux dessins extrêmes. Nous avons bien là une illustration de la structure du fantasme dans cet échange : lorsqu'on voit l'un des termes, l'autre ne se reconnaît pas ; lorsqu'on voit l'autre c'est l'un qui s'est perdu. *C'est un premier élément dans la construction du connecteur qui lie les deux termes hétérogènes articulés par le fantasme.*

La ligne sans points

Un ultime mouvement du cercle disposé selon un huit intérieur provoque la rétraction de la partie mœbienne du plan projectif, lorsque ce cercle se confond avec lui-même pour donner une

simple ligne. Chaque point du cercle, étant orienté par une flèche indiquant l'extension, vient annuler un autre point du cercle pourvu d'une flèche qui lui est opposée. La ligne obtenue est faite de points qui s'annulent deux à deux.

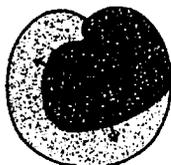


Fig. 9

Compte tenu de l'orientation donnée par les flèches, nous pouvons dire cette ligne sans points. A cet instant, l'ensemble de l'étoffe est constituée par la partie sphérique à elle seule (l'extension du disque du dessin 0), recollée selon un procédé spécial. *Cela constitue le second élément nécessaire dans la construction du connecteur qui lie les deux termes hétérogènes articulés par le fantasme.*

Remarquons que, dans notre protocole de transformation des trajets à la surface du cross-cap, nous nous interdisions de faire se recouper ces trajets en d'autres points que ceux de la ligne de singularité (ligne d'immersion). Ce qui caractérise l'étape de la ligne sans points et l'autorise, c'est que tous les points s'annulent. Mais cette situation est instable du fait de son caractère exceptionnel. Il s'agit du moment que le Docteur Lacan a désigné de la passe dans le discours analytique, où la courbe à double tour du fantasme qui structure cette étoffe se traverse. Ainsi le Docteur Lacan peut parler de la traversée du fantasme pour la fin de l'analyse.

Si nous poursuivons le mouvement en suivant le sens des flèches, nous pouvons rétablir la bande de Mœbius, mais l'orientation relative au trajet montre que quelque chose s'est inversé.



Fig. 10

Où l'on voit qu'à l'horizon de son extension, à la surface du plan projectif, le mouvement du trajet devient l'intension. C'est donc bien, comme le dit Lacan, "à l'horizon même de la

psychanalyse en extension que se noue le cercle intérieur de la psychanalyse en intension" (*Proposition du 9 octobre 1967*, p. 27).

Cela se voit d'autant mieux à *reprendre la série de nos dessins à rebours*. A partir de l'étape où nous sommes ici, nous pouvons rétracter la partie sphérique du cross-cap, mais les flèches sont inversées.

Si nous étions partis de la situation suivante,

"cercle intérieur comme béance de la psychanalyse en intension."

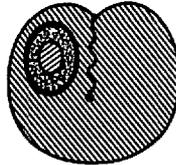


Fig. 11

nous obtiendrions, en fin de parcours, cette situation où le cercle extérieur de la psychanalyse en extension est prêt à s'identifier au bord de la béance de la psychanalyse en intension, après s'être inversé.

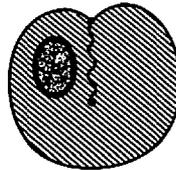


Fig. 12

Le fantasme qui articule les deux éléments hétérogènes est noté par un connecteur \diamond qui se lit : "... poinçon de...". Il est présenté ici en termes d'étoffes grâce à un cercle frontière entre deux étoffes hétérogènes. Cette présentation comporte deux éléments nécessaires : 1) celui de l'oscillation propre au fantasme ; et 2) celui de la traversée du fantasme, avec effacement d'un des termes, mais présentant une instabilité ou pour mieux dire une instantanéité de peu d'habileté. Ce lieu n'est vraiment pas touristique : il ferme au moment où on y arrive, et lorsqu'il ouvre on n'y est déjà plus.

Il n'est donc pas question pour nous de sortir du fantasme mais d'en rendre compte. Ici il n'est proposé qu'une approche par l'Imaginaire de la dimension d'eux.

Sur la bande de Mœbius, ces deux termes peuvent être présentés en trois dessins,

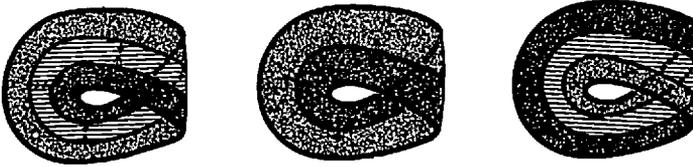


Fig. 13

grâce auxquels nous exercerons notre logique.

2. Topologie des coloriage des faces de l'étoffe ayant une structure de plan projectif réel

Nous conservons comme espace d'effectuation de cette topologie du plan projectif la multiplicité que constitue le cross-cap.

a - Objets

Ce sont les coloriage des faces du cross-cap.

a' - Transformations

Le coloriage s'étend, de manière continue, sur les faces de notre modèle, à condition de respecter, comme pour les trajets, la traversée de la ligne de singularité selon le principe local du dièdre. Si une nappe d'étoffe dans le voisinage de la ligne de points multiples (ligne d'immersion) porte une couleur, celle-ci se poursuit sur la même nappe et la même face après avoir traversé la ligne de singularité.



Fig. 14

Cela n'empêche pas que l'étoffe dans son ensemble peut bien être dite unilatère, puisqu'un coloriage qui ne rencontre aucune frontière va pouvoir, de manière continue, couvrir l'ensemble de l'étoffe sur ses deux faces, comme en une moire antique. Une portion de plan projectif autour du dièdre

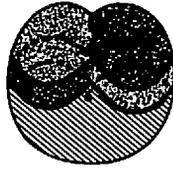
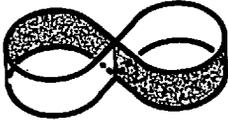
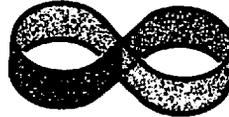


Fig. 15

est, selon notre protocole de coloriage, bilatère.



Une seule face est coloriée.



La seconde face est coloriée. Les deux faces du dièdre sont bien distinctes.

Fig. 16

Les deux faces ne sont mises en continuité qu'à partir d'une bretelle qui contourne la ligne de singularité (ligne d'immersion).



Fig. 17

Le coloriage est univoque, l'étoffe unilatère. Ainsi peut se saisir le caractère unilatère de l'ensemble.

A titre d'exercice, proposons-nous de colorier le cross-cap, selon notre principe qui consiste à traverser la ligne de singularité (ligne d'immersion), lorsqu'il porte un trajet le séparant en plusieurs parties dans différentes situations.

Nous changeons de couleur lorsque nous rencontrons le trajet qui fait frontière et nous ne poursuivons pas le coloriage au voisinage du dièdre sur la face visible : le coloriage se poursuit à l'intérieur de l'objet du cross-cap de manière non visible.

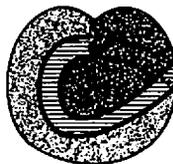


Fig. 18

Chapitre II

La construction intelligible

De la présentation immergée
des étoffes non orientables

1. Construction du modèle immergé du plan projectif

Le bord unique d'une bande de Mœbius est réputé pouvoir être fermé par une pastille sphérique (disque), comme c'est le cas d'un quelconque composant de bord d'une étoffe à bord (voir chap. II).

Or cette fermeture ne peut être réalisée dans l'espace de dimension trois dans le cas des étoffes non orientables. Pour être plus précis, cette impossibilité est liée au fait que nous souhaiterions fermer le trou de la bande de Mœbius sans que cette opération crée des singularités, sources de confusion. Or c'est cela qui n'est pas possible. Il faut donc se résoudre à ne considérer le plan projectif que compte tenu de singularités, qui en faussent la conception.

La bande de Mœbius est déjà une solution, puisqu'elle est un plan projectif troué. Le trou est une singularité qu'il n'y a pas dans le plan projectif réel. L'intérêt de cette présentation du plan projectif comme une bande de Mœbius réside dans le fait qu'il n'y a d'autre singularité que le trou et que la bande de Mœbius, elle, peut être intégralement plongée dans l'espace de dimension trois, c'est-à-dire qu'elle peut être représentée en tant que telle. C'est donc la meilleure représentation de la structure.

L'autre solution consiste à construire un cross-cap présentant une ligne de points singuliers à partir de la bande de Mœbius. Pour éviter une surcharge de singularités qui provoque la confusion à l'égard de la structure nous construisons le cross-cap en prenant comme ligne de points multiples (ligne d'immersion) la ligne de pli (ligne de perspective : ligne qui n'est pas un bord, voir chap. I) de la bande de Mœbius.

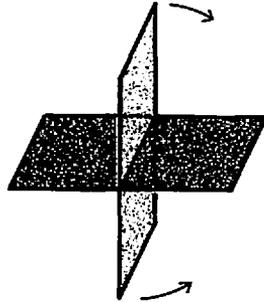


Fig. 1

Considérons un dièdre fait de l'intersection de deux morceaux de plan.

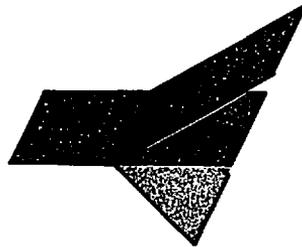


Fig. 2

Nous plions l'une des nappes de ce dièdre de telle manière que la droite d'intersection des deux morceaux de plan soit aussi la ligne de pli. Nous pouvons supposer assez facilement, à cette étape, le nombre d'épaisseurs d'étoffe qu'il y a dans chaque zone du dessin.

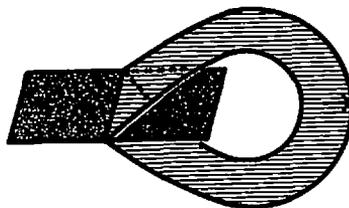


Fig. 3

En identifiant les deux bords extrêmes de la nappe pliée, mI et Mi , nous obtenons une bande de Mœbius lorsque M coïncide avec m et I avec i (mI , Mi). Le bord de la bande de Mœbius est constitué du trajet $miMI$ soit le trajet $miIMm$.

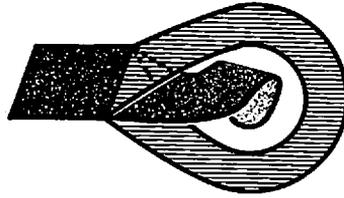


Fig. 4

C'est dans la figure ainsi obtenue d'une bande de Mœbius, en intersection selon sa ligne de pli avec un élément de plan, que nous allons effectuer la fermeture de ce bord par ce morceau de plan en identifiant, point par point, le bord du morceau de plan avec le bord de la bande de Mœbius. Pour réaliser cette fermeture, présentons le disque rectangulaire (équivalence topologique) avec deux plis provoqués par la torsion de ce morceau de plan.

Premier pli au centre de la figure.

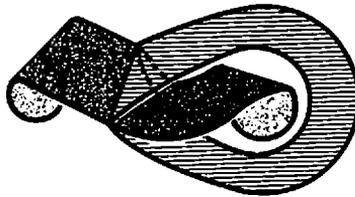


Fig. 5

Second pli, à gauche de la figure.

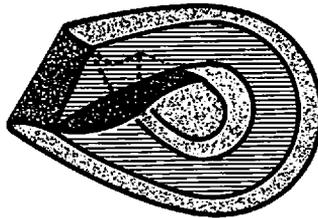


Fig. 6

En développant l'autre partie de notre morceau de plan en arrière de la figure.

Nous pouvons indiquer, sur le dessin de cette construction, le nombre d'épaisseurs d'étoffe qu'il y a dans chaque zone.

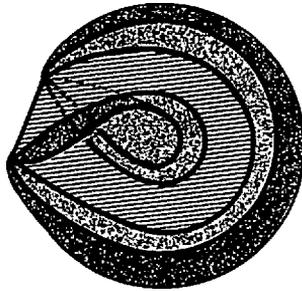


Fig. 7

Et c'est à refermer cette construction que nous obtenons le bonnet croisé.

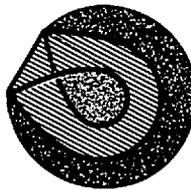
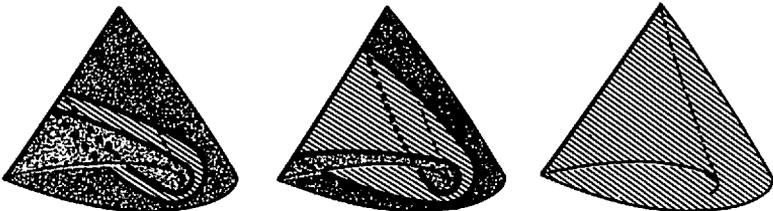


Fig. 8

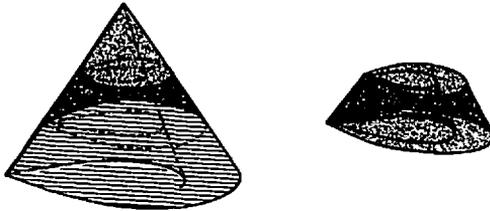
Nous fermons cette construction.



Le bonnet croisé vu sous un autre angle où apparaît une ligne de pli.

Fig. 9

Partant du bonnet croisé, si on souffle dedans avec une pression d'air, il se gonfle comme un ballon qui restera pincé le long de la ligne de singularité. Ce sera alors la présentation standard du cross-cap. Ce bonnet croisé est une sorte de bonnet dont le creux est un manchon fermé comme un lit en portefeuille. Le bonnet est croisé en huit intérieur, en le trouant et en retournant l'une des boucles du huit, on retrouve le cross-cap standard.



Nous pouvons isoler une portion du plan projectif immergé, comme dans les figures 15 et 16 du chapitre précédent, où nous voyons cette fois le huit intérieur.

Fig. 10

L'étape de la figure 8 avant de fermer complètement le cross-cap est la plus instructive pour nous. Grâce à cette construction, le principe de la topologie des coloriage du plan projectif réel sur le cross-cap s'en saisit. Il consiste à traverser la ligne de singularité en restant sur la même nappe d'étoffe et du même côté de l'étoffe (voir chap. I de ce même appendice).

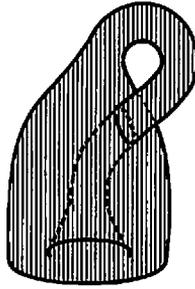
2. Relation du modèle immergé et du modèle troué plongé de la bouteille de Klein

La bouteille de Klein est l'étoffe immergée qui permet d'étudier la topologie de deux plans projectifs composés entre eux pour faire une seule étoffe sans bord unilatère et qui n'est pas plongeable dans l'espace de dimension trois.

Comme pour le cross-cap, où il y a discussion sur la présence ou l'absence d'un trou³, la présence ou l'absence d'une pastille au travers du goulot peut se discuter. Si on ne met pas la pastille, c'est une bouteille de Klein trouée : donc elle peut être plongée. La nécessité du modèle immergé tient au fait qu'il n'y a pas de trou, donc qu'il y a une pastille en travers du goulot.

Montrons la transformation continue du modèle immergé de la bouteille de Klein sans la pastille. Nous obtiendrons une 2-bande de Möbius plongée, soit une bouteille de Klein trouée.

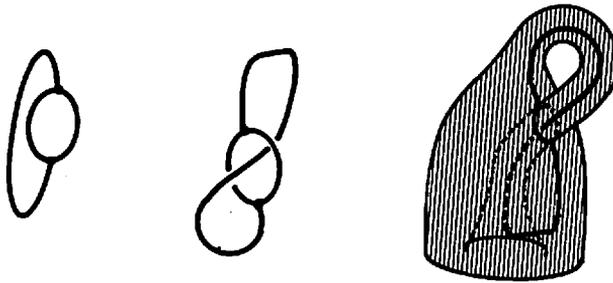
3. GeorGIN, *Littoral* n° 17, p. 164.



Ligne d'immersion

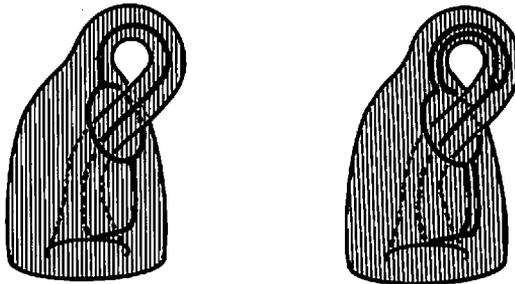
Nous retirons la pastille, qui est supposée par nous en travers du goulot, à l'endroit où celui-ci traverse l'étoffe du corps de la bouteille (ligne d'immersion).

Fig. 11



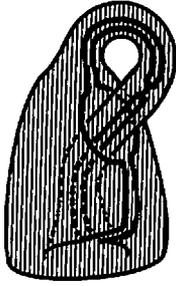
Traçons un graphe constitué : 1) de la ligne d'immersion qui est devenue un bord de l'étoffe enserrant le goulot ; 2) d'une arête joignant deux points de ce bord et qui en traverse le cercle par ailleurs du fait de suivre la partie cylindrique qui va du goulot au culot de la bouteille.

Fig. 12

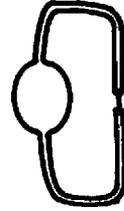


Nous élargissons le bord de cette étoffe en un cercle plus large, par où passe maintenant la partie cylindrique. Il n'y a plus d'immersion. Puis nous déformons ce bord en l'allongeant, de manière à rétracter l'arête supplémentaire du graphe qui nous sert d'appui intuitif.

Fig. 13



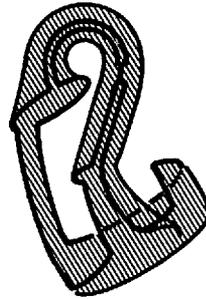
Nous prolongeons cette transformation,



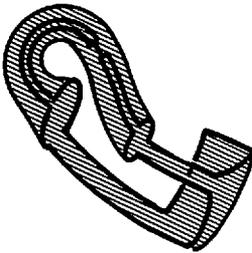
le graphe est déformé ainsi.
Fig. 14



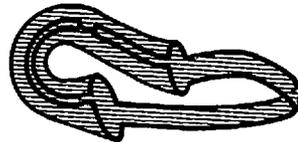
L'étoffe peut se rétracter d'un côté,
ouvrant ainsi sa structure au regard,



puis de l'autre côté aussi.
Fig. 15



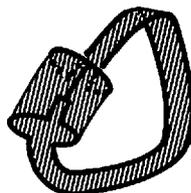
Nous rétractons encore le haut, une
ligne de pli disparaît dans cette rotation,



cela jusqu'à former une bande.
Fig. 16



Nous rétractons la portion cylindrique qui présente un pont portant l'arête de notre graphe.

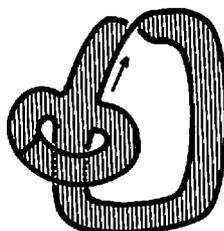


La partie cylindrique peut être déformée ainsi, où l'on voit mieux le graphe.

Fig. 17

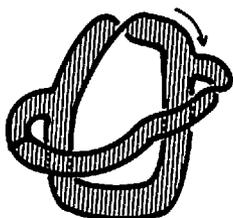


Nous pouvons lui donner cette présentation par un élargissement du pont que nous signalons précédemment.

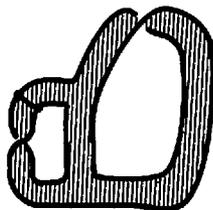


Nous supprimons les demi-torsions inutiles et une ligne de pli en haut.

Fig. 18



Nous déplaçons vers le haut l'attache de la bretelle jusqu'à lui faire passer une demi-torsion (voir chap. I).



Il se crée donc une demi-torsion sur cette bretelle qui peut être rétractée en poursuivant son parcours.

Fig. 19

Cette étoffe peut être présentée de manière plus symétrique, il s'agit bien de deux bandes de Möbius, soit une bouteille de Klein trouée (voir chap. II).



Fig. 20

Chapitre III

La psychanalyse parée du prestige du n'espace

Les schémas de Lacan à la surface du cross-cap

1. Le schéma R et le schéma L de Lacan à la surface du plan projectif immergé

Il est facile, quoique peu immédiat, de se reporter à la monstration du chapitre précédent de cet Appendice, précisément au dessin 11 de la figure 8 et aux figures 9 et 10, pour situer le champ de la réalité sur le cross-cap. C'est une bande de Mœbius.

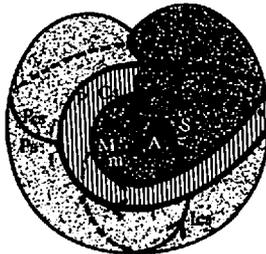


Fig. 1

Les points I_i et M_m sont identifiés comme sur les figures 28 et 32 de notre conclusion. Ici le trou mœbien, dont le bord est fermé par un disque que nous rétractons en un point, pour donner le point formé de l'identification de S et A. Nous voyons se tracer le circuit de l'inconscient en un cercle à la surface du cross-cap. Ce circuit est ouvert du fait d'être interrompu par la zone R de la réalité.

Les deux côtés du schéma F, AI et Si, orientés d'une flèche, sont également identifiés ici en une arête de graphe.

C'est par la rétraction du champ R de la réalité que la coupure (im , MI) se traverse pour donner une ligne sans points.

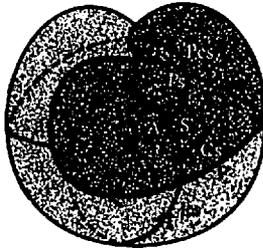


Fig. 2

Ici, le circuit de l'inconscient est fermé l'espace d'un instant : il s'agit alors du plongement de la fermeture du schéma L à la surface du plan projectif immergé.

En découpant ces deux objets selon la ligne qui sépare les points identifiés, on obtient, dans les deux cas, un carré qui dessine les schémas R et L de Lacan.

2. En hautes dimensions

Aux lecteurs qui ne manquent pas d'imagination, nous pouvons suggérer de lire d'une autre manière les coupures de la bande de Moebius. Il s'agit de montrer comment un plan projectif est une étoffe qui ne sépare pas l'espace de dimension quatre, à la manière dont un rond laisse connexe l'espace qui est autour de lui en dimension trois.

Décrivons la situation que nous voulons indiquer en recourant à un cas de plus basse dimension. Une sphère en dimension trois découpe l'espace en deux volumes non connexes. Une portion de plan est l'intersection de cette sphère avec une autre sphère. La portion de plan est une sphère trouée.



Fig. 3

Cette portion de plan, qui coupe cette sphère, porte la trace en dimension deux de cette séparation.

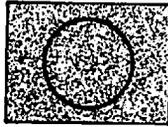


Fig. 4

Le cercle, de dimension un, dessiné sur le plan, de dimension deux, est la trace de la sphère, étoffe de dimension deux, dans l'espace de dimension trois.

Supposons en dimension quatre une sphère coupée par un plan projectif.

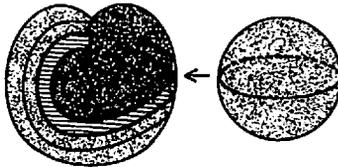


Fig. 5

Ce plan projectif, comme un lambeau de calicot, porte la trace de la sphère pliée en dimension quatre : c'est la coupure à double tour. Un plan projectif troué est une bande de Mœbius.

De la même manière, nous pouvons dire que la bande de Mœbius de dimension deux porte la trace (la coupure à double tour) de dimension un de la sphère.



Fig. 6

Une sphère pliée en dimension quatre, prête à s'identifier avec elle-même, se traverse pour donner à cet instant l'étoffe dont elle est la doublure (revêtement). Au moment où cette sphère s'identifie en se traversant, elle est un plan projectif. Supposons

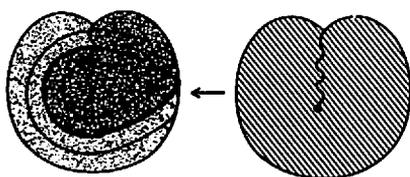


Fig. 7

Cette trace est un cercle (coupure à tour unique). Le plan projectif troué étant une bande de Mœbius.

En dimension trois la bande de Mœbius porte la trace de la coupure du plan projectif par un autre plan projectif. La ligne sans point que nous obtenons sur la bande de Mœbius

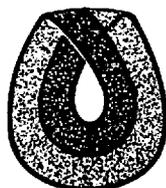


Fig. 8

est la trace du plan projectif, de dimension deux, qui ne sépare pas l'espace de dimension quatre en deux moitiés non connexes. Que cet espace de dimension quatre, séparé par le plan projectif, soit orientable, explique, si nous ne nous trompons pas, que la ligne sans points découpe la bande de Mœbius en une bande bilatère. (Peut-être nous dira-t-on un jour que cette orientation n'est de mise que pour la localité prélevée de l'espace de dimension quatre qu'est la bande de Mœbius, ici plongée en dimension trois.)

Ainsi, la coupure dans la bande de Mœbius ou le cross-cap est bien l'étoffe. Elle en est plus exactement la trace. C'est une autre façon d'entendre cette présentation de la structure, mais nous lui préférons nos exercices d'échange des trous puisqu'il va être question de les nouer⁴.

Notre politique et nos stratégies conviennent mieux au style de l'abord mathématique du réel puisque nous ne prétendons pas montrer la chose elle-même mais la serrer de l'articulation de nos graphèmes entre eux. Sans doute l'idéalisme, de ceux qui en veulent plus, a la vie dure !

4. *Nœud*, fascicule n° 3.

INDEX, BIBLIOGRAPHIES, TABLE



Index des termes

La définition n'accompagne pas toujours la première occurrence de chacun des termes employés dans le texte. Ainsi, le lecteur trouvera indiqués deux chiffres à l'occasion de chaque terme. Le premier renvoie à la première apparition dans le texte, le second à l'endroit où il est défini.

Nous avons adopté cette façon de présenter les choses du fait que l'on n'apprend bien ce que l'on sait déjà (mathémata, mathème).

aliénation	28	29	coupure	IV	132
âme	42	249	qui subvertit la		
angoisse	17	17	structure	132	132
anneau	9	9	cross-cap	X	304
annulation de bord	122	122	culpabilité	23	58
appareil psychique	IV	18	cycle	16	119
arête	IX	78	cycle-bord	120	120
Autre, \mathbb{A}	19	19	découpage orientable		
autre, a' , a , $i(a)$	V	19	par morceaux	122	125
bande	79	86	demi-torsion	48	62
de Möebius	X	85	apparente	101	101
2-bande de Möebius	84	84	effective	101	101
bord	X	79	désir	IX	46
qui consiste	122	123	deux	I	13
qui insiste	123	123	dimension	XI	14
boucle	XII	74	disque	35	85
bouteille de Klein	25	84	troué	86	87
trouée	84	85	double	IV	160
bretelle			doublure	25	236
au sens large	70	70	élément		
au sens strict	101	101	de base	83	83
gauche	105	105	de bord	74	74
tordue	90	105	de surface	77	77
$\mathcal{C}a$, E_s	IV	IV	éttoffe	10	10
calotte sphérique	209	209	bilatère	26	106
carrefour			sans bord	45	46
de bandes	34	264	trouée	50	50
de rubans	70	264	unilatère	26	106
castration, $-\phi$	41	44	à bord qui consiste	123	123
chaîne	21	39	à bord qui insiste	123	123
de bord	39	39	existence	X	46
codimension	37	94	extrinsèque	XI	37
coloriage	60	63	extrémité	77	77
composant de bord	47	79	face	9	78
Conscience, C_s	V	25	cachée	137	137
consistance	14	61	d'un disque ou d'une		
corps	13	28	pièce de monnaie	106	106
côté	29	30	d'un pavage	78	78
d'une surface	137	137			

fantasme, \$ \phi a	XI	25	moi, a, a', m	V	19
fermeture des trous	80	80	moi idéal, $i, i(a)$	VI	23
fétiche	25	39	montage		
forclusion	101	101	de morceaux d'étoffe	77	78
frontière	78	125	faux	122	122
			orientable par morceaux	125	125
gauche (orientation)	81	105	vrai	122	122
générateur	48	118	morceau		
genre	26	113	bicolore	63	133
graphe			d'étoffe	42	77
de découpage	124	124	monochrome	62	133
de montage	124	124	narcissisme	V	40
graphe d'un pavage	78	78	névrose	VI	23
groupe			nœud	IV	37
d'homologie	38	119	de bord	XI	39
d'homotopie	38	117	torique	157	167
fondamental	45	117	nombre		
			de bord	69	69
homologie	38	79	de faces	65	65
relative	121	121	non orientable	X	109
homotopie	38	118	objet a	XIV	25
de rubans (ou de bandes)	72	72	Œdipe	23	29
du bord	71	71	oreille	104	104
			orientable	X	107
Idéal du moi, I, $S_2, I(A)$	19	53	passe	24	310
identification	20	20	pastille	77	77
de bord	123	123	pavage	78	78
Imaginaire	VII	27	orientable par faces	125	125
immersion	40	40	pénis, ϕ	17	59
Inconscient	I	18	Perception, P	V	25
incorporation	27	27	Perception-signes, Ps	V	18
indicateur d'Euler-Poincaré	69	110	père, P	21	57
insistance	XII	45	perversion	100	100
intrinsèque	XI	37	phallus, i, Φ, S_1	XII	21
introjection	23	47	plaisir	VIII	54
invariant	VII	99	plan projectif	X	84
algébrique	109	109	troué	84	85
arithmétique	109	109	plein	66	67
topologique	13	99	pli	48	62
involution signifiante	X	233	plongement	XI	40
			point hors ligne	36	307
jouissance	27	53	pont	101	101
de l'Autre, J_A	53	58	Préconscient	V	18
phallique, $J\Phi$	53	58	prématuration	28	28
			projection	30	47
lacet	117	117	psychose	59	294
lambeau	28	77	pudeur	21	21
ligne			pulsion, \$ \phi D	V	60
de l'extension	35	307	quotient	60	60
de l'intension	35	310	réalité	IX	24
sans points	35	310	réduction mathématique	48	48
			Réel	XI	59
masque	41	249			
merde	26	157			
mère, M, objet primordial	19	19			
métalangage	43	83			

refoulement	25	233	tension	17	54
regard	III	26	topologie algébrique	39	39
répétition	VII	233	tore	VII	84
représentation	XI	14	troué	84	85
retournement du tore	164	200	torsion	13	71
revêtement	25	236	traduction	I	83
ruban	62	70	trait unaire	18	18
scybale	26	26	trajet	IV	113
segment	V	77	torique	10	167
sein	26	26	transfert	III	45
séparation	IV	29	transformation topologique	69	69
shéma de la lettre 52	IV	IV	traversée du fantôme	310	310
shéma F	VIII	VIII	triangulation	78	78
shéma I	277	277	trou	X	XII
shéma L	VIII	VIII	imaginable	36	36
shéma R	VIII	VIII	mœebien	X	258
shémas de Griffiths	91	91	réel	149	149
sommet			torique	48	48
-frontière	125	125	variété	IV	13
pur-frontière	125	125	vide	28	66
qui consiste	124	124	voix	III	26
qui insiste	124	124	zone		
sommet d'un graphe	34	78	extérieure	9	9
sphère	IX	84	intérieure	9	9
à anses	160	160	pleine	67	67
à deux trous	86	86	vide	66	66
à tubes	162	162	zone \mathcal{J}	16	21
de Soury	91	91	zone \mathcal{R}	16	20
trouée	34	85	zone \mathcal{S}	16	21
structure					
du langage	VII	43			
du sujet	14	18			
sujet, \mathcal{E} , \mathcal{S}	V	25			
surface	IV	IV			
à bord	39	80			
d'empan	39	61			
de Seifert	62	62			
non orientable	X	106			
orientable	X	106			
sans bord	39	80			
Symbolique	VII	45			

Bibliographies

Œuvres de Freud et écrits de Lacan accompagnés de quelques séminaires

[1] Sigmund Freud

- a. *Contribution à la conception des aphasies*, PUF, 1986.
- b. *La Naissance de la psychanalyse*, PUF, 1956.
- c. *L'Interprétation des rêves*, PUF, 1926.
- d. *Psychopathologie de la vie quotidienne*, Payot, 1985.
- e. *Trois Essais sur la théorie de la sexualité*, Gallimard, 1962.
- e'. *Trois Essais sur la théorie du sexuel*, La Transa, 1984.
- f. *Le Mot d'esprit dans ses rapports avec l'inconscient*, Gallimard, 1930.
- g. *Des Sens opposés des mots primitifs*, dans *Essais de psychanalyse appliquée*, Gallimard, 1933.
- h. *Totem et Tabou*, Payot, 1912.
- i. *Pour introduire le narcissisme*, dans *La Vie sexuelle*, PUF, 1969.
- j. *Métapsychologie*, Gallimard, 1968.
- k. *Introduction à la psychanalyse*, Payot, 1965.
- l. *Au-delà du principe de plaisir*, dans *Essais de psychanalyse*, Payot, 1984.
- m. *Psychologie des foules et Analyse du moi*, dans *Essais de psychanalyse*, Payot, 1984.
- n. *Le Moi et le Ça*, dans *Essais de psychanalyse*, Payot, 1984.
- o. *Nouvelles Conférences de psychanalyse*, Gallimard, 1984.

[2] Jacques Lacan

- E. *Écrits*, Seuil, 1966.
- a. *Hommage fait à Marguerite Duras*, dans *Marguerite Duras*, Albatros, 1979.
- b. *Introduction de Scilicet au titre de la revue de l'École freudienne de Paris*, Scilicet n°1, Seuil.
- c. *Proposition du 9 octobre 1967 sur le psychanalyste de l'École*, Scilicet n° 1, Seuil.
- d. *La Méprise du sujet supposé savoir*, Scilicet n° 1, Seuil.
- e. *La Raison d'un échec*, Scilicet n° 1, Seuil.
- f. *Radiophonie*, Scilicet n° 2/3, Seuil.
- g. *Lituraterre*, Littérature n° 1, Larousse, 1971.

- h. *L'Etourdit*, Scilicet n°4, Seuil.
- i. *A la lecture du 17 décembre*, Ornicar ? n° 2.
- j. *Télévision*, Seuil, 1974.

- S. I. Séminaire I, *Les Ecrits techniques de Freud*, Seuil, 1975.
- S. VII. Séminaire VII, *L'Ethique de la psychanalyse*, Seuil, 1986.
- S. XI. Séminaire XI, *Les Quatre Concepts fondamentaux de la psychanalyse*, Seuil, 1973.
- S. XX. Séminaire XX, *Encore*, Seuil, 1975.
- S. XXII. Séminaire XXII, *RSI*, Ornicar ? n° 5.
- S. XXIV. Séminaire XXIV, *L'Insu que sait de l'Une-bévue s'aile à mourre*, Ornicar ? n° 12/13.

Bibliographie relative à la théorie des surfaces topologiques intrinsèques

— Présentations facilement accessibles de la théorie :

- [3] H. B. Griffiths, *Surfaces*, Cedic, 1977; édition originale en anglais Cambridge University Press, 1976.
- [4] S. Barr, *Expériences de topologie*, Lysimaque, 1987.
- [5] W. Lietzmann, *Anschauliche Topologie*, Verlag R. Oldenbourg, Munich, 1955 ; *Visual Topology*, Chatto and Windus, Londres, 1965.

— Exposés mathématiques de la théorie :

- [6] D. Lehmann et C. Sacré, *Géométrie et Topologie des surfaces*, PUF, 1982.
- [7] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, PUF, Sup, 1971.

— Ouvrages plus généraux traitant aussi de la théorie des surfaces:

- [8] M. A. Armstrong, *Basic topology*, Mac Crow Hill, 1979.
- [9] A. H. Wallace, *An introduction to Algebraic Topology*, Pergamon Press, 1957 ; *Introduction à la topologie algébrique*, trad. fr. par J.-L. Verley, Gauthiers Villars, 1973.
- [10] E.E. Moïse, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer Verlag, 1977.

— Un chapitre récent de la théorie des surfaces :

- [11] C. Léger et J.- C. Terrasson,
 - a. *Pavages et Métamorphoses des pavages*, Universalia 1987, p. 305, Encyclopædia Universalis, 1987.
 - b. *Les Cinq Métamorphoses des surfaces pavées*, Diagrammes, supplément au n° 18, décembre 1987, Ed. C. Lair, Université de Paris VII.

Bibliographie d'introduction à la théorie de la dimension

- [12] G. Bouligand, *Les Définitions modernes de la dimension*, Hermann, 1935.
- [13] W. Hurewicz et H. Walman, *Dimension theorie*, Princeton, 1941.
- [14] R. Engelking, *Dimension theorie*, Worsoland Mathematical Library, New-York, 1978. Ce dernier ouvrage contient une bibliographie importante.

Bibliographie générale

- [15] G. Bataille, *Lascaux ou la Naissance de l'art*, Skira-Flammarion, Paris, 1980.
- [16] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques*, Hermann, 1970.
- [17] R. Caillois,
a. *Le Mythe et l'Homme*, Gallimard, 1938 ;
b. *Méduse et Société*, Gallimard, 1960.
- [18] C. Buci-Glucksmann, *La Folie de voir*, Galilée, 1986.
- [19] G. Canguilhem,
a. *Etudes d'histoire et de philosophie des sciences*, Vrin, 1970 ;
b. *La Connaissance de la vie*, Vrin, 1970.
- [20] [G. G. Clérambault], *La Passion des étoffes chez un neuropsychiatre, G. G. Clérambault*, Solin, 1980.
- [21] J. Delay, *La Jeunesse de Gide*, Gallimard, 1956.
- [22] M. Duras, *Les Petits Chevaux de Tarquinia*, Gallimard, 1953.
- [23] E. Gilson, *Le Thomisme*, Vrin, 1965.
- [24] Grévisse, *Le Bon Usage*, Duculot, Gembloux, 1975.
- [25] R. Jakobson, *Essais de linguistique générale*, Minuit, 1963.
- [26] A. Lautman, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, dans *Essais sur l'unité des mathématiques*, UGE, 10/18, 1977.
- [27] P. Legendre,
a. *Leçons II, L'Empire de la vérité*, Fayard, 1983.
b. *Leçons IV, L'Inestimable Objet de la transmission*, Fayard, 1985.
- [28] E. Lévine, «Au début était le masque», *Océanie, le masque au long cours*, Ouest-France, 1983.
- [29] C. Lévi-Strauss,
a. *Tristes Tropiques*, Plon, 1955.
b. *Anthropologie structurale I*, Plon, 1958.
c. *La Voix des masques*, Plon, 1979.
d. *Paroles données*, Plon, 1984.
- [30] M. Merleau-Ponty, *Le Visible et l'Invisible*, Gallimard, 1964.
- [31] B. Ogilvie, *Lacan et la Formation du concept de sujet*, PUF, 1987.
- [32] H. Poincaré,
a. *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1970.
b. *La Valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1970.
- [33] J.-C. Pont, *La Topologie algébrique des origines à Poincaré*, PUF, 1957.

- [34] J.-P. Sartre, *L'Imaginaire*, Gallimard, 1940.
- [35] G. Sissa, *Le Corps virginal*, Vrin, 1987.
- [36] Y. et S. Tisseron, *L'Erotisme du toucher des étoffes*, Archimbaud, 1987.
- [37] J.-M. Vappereau,
- a. *Consistance de l'abréviation en mathématiques*, mémoire de D.E.A., Université de Paris VIII, 1982.
 - b. *Début de la lecture des Ecrits de Jacques Lacan*, Cahiers de lecture freudienne n° 5, Lysimaque, octobre 1984, pp. 25-44.
 - c. *D'un calcul dans les champs d'existence du nœud*, Ornicar ? n° 28, janvier 1984, pp. 133-143.
 - d. *Deux Usages du calcul dans les champs d'existence du nœud*, Ornicar ? n° 31, décembre 1984, pp. 166-172.
 - e. *Essaim, fascicule de résultats n° 1*, Point Hors Ligne, 1985.
 - f. *Topologie du sujet et Logique booléenne*, Les Cahiers du lycée logique, n° 10, J.-P. Gilson, 1986.
 - g. *Logique de la cure et Fantasma*, Cahiers de lectures freudiennes n° 11/12, Lysimaque, 1987.
 - h. *Thèses sur le ruisseau ardent*, Cahiers de lectures freudiennes n° 13, Lysimaque, 1988.

Table des matières

Présentation de la série des fascicules de résultats

I à XVIII

LE MIRAGE DE LA TOPOLOGIE

POUR INTRODUIRE...

13

1. **La naissance de la dimension.**— a - La dimension est un invariant topologique.— a' - Le nombre d'eux c'est l'Imaginaire. (A) *Incidence de la répétition.* (A') *Composition de perception et conscience.*— a'' - *Etoffes.*

2. **Le mirage classique et le mirage topologique.**— a - Lacan et les jeux de la dimension.— a' - L'Imaginaire c'est le corps. (A) *L'involution signifiante.* (A') *La dynamique des coupures.*

3. **Le passage, l'optique et...**— a - Intrinsic/extrinsic.— a' - Les narcissismes et le transfert. (A) *Premier schéma optique.* (A') *Deuxième schéma optique.* (A'') *Troisième schéma optique.*

4. **... le cabinet des desseins.**— a - Traits.— a' - Dessins.

LA PSYCHANALYSE AVEC LACAN

Chapitre I

53

LA JOUISSANCE ET L'INTERDIT DU DÉSIR

Surfaces d'empan d'un nœud

TROU IMAGINABLE,
NOMBRE DE FACES

1. **De la jouissance.**— a - Présentation scripturale.— a' - Où la jouissance dans la construction freudienne.— a'' - Présentation structurale.

2. **De l'essaim à l'étoffe.**— a₁ - Construction des surfaces d'empan. Exemple du nœud borroméen.— a₂ - Demi-torsions et plis. *Exemples de la bande à deux plis et du nœud borroméen.*

3. Propriétés intrinsèques caractéristiques d'une surface d'empan.— a_1 - Le nombre de faces. *Deux présentations du nœud trèfle.*— a_2 - Le nombre de bord.

4. Réduction par le dessin d'une surface d'empan à ses caractéristiques intrinsèques. Opération I : déformation des surfaces à bord. Opération II : suppression des demi-torsions en nombre pair. Opération III : échange des dessus-dessous des rubans d'étoffe. *Exemples du nœud trèfle dans sa présentation bilatère et du nœud borroméen.*

Chapitre II

77

L'ÉTOFFE DU CLASSICISME ET LA SURFACE POUR LACAN

Théorie des surfaces topologiques intrinsèques

NOMBRE DE BORD,
SHÉMAS P.Q.R.

1. Définitions.— a_1 - Les surfaces topologiques. Les morceaux d'étoffe ; Deux principes de montage.— a_2 - Définition du bord d'une surface topologique. *Le bord ; Le bord annulé.*— a_3 - Première proposition importante.— a_4 - Invariants intrinsèques.

2. Eléments de base de la classification des surfaces et leur mode de composition.— a_1 - Théories. *Première version : Théorie des surfaces sans bord. Deuxième version : Théorie des surfaces à bord présentant un seul cercle composant. 1 - Articulation. 2 - Les éléments de base. Troisième version : Théorie des surfaces quelconques à bord (trouées). 1 - Articulation. 2 - Les éléments de base.*— a_2 - Composition développée des éléments de base.— a_3 - Seconde proposition importante. *Théorème principal ; Théorème général ; Monstration du théorème général.*

3. Présentations.— a_1 - La grande sphère de Soury.— a_2 - Les schémas de Griffiths.— a_3 - Divers compléments à notre présentation de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques. *Les identifications de polygones sphériques. La théorie de Morse. Les métamorphoses de pavages de surfaces.*— a_4 - Avantages de notre présentation.

4. Conclusion.

Chapitre III

99

LA NAISSANCE DU JEU

Invariants

DEMI-TORSION ET NOMBRE DE BORD
LES AUTRES INVARIANTS

1. Les demi-torsions apparentes des bretelles et le nombre de bord.

2. Surfaces orientables, surfaces non orientables.

3. Présentation des invariants intrinsèques des surfaces topologiques.— a_1 - L'indicateur d'Euler-Poincaré.— a_2 - Le nombre de

bord.— a_3 - Le genre.— a_4 - Le groupe fondamental.— a_5 - Le groupe d'homologie.

4. Présentation des surfaces topologiques intrinsèques par des montages orientables et non orientables par morceaux.— a_1 - Théorie des découpages orientables par morceaux. *Corollaire principal.*— a_2 - Les étoffes désorientées. *Théorème de réorientation.*— a_3 - Théorie des découpages orientables et non orientables par morceaux.— a_4 - Une modalité du genre des surfaces non orientables.

Chapitre IV

137

À CE LIEU DE NOTRE NAISSANCE...

Le sein

TROU IMAGINABLE

1. Invariants.

2. La sphère comme une étoffe sans bord.— a_1 - Intension et extension sur la sphère.— a_2 - Le graphe sur la sphère.— a_3 - Monstration de l'incidence de la répétition. *1 - Dans le cas où la zone \mathcal{R} consiste. 2 - Dans le cas où la zone \mathcal{R} est rétractée, c'est le cas du schéma L.*

3. La sphère trouée.— a_1 - Tentative de construction de la sphère par identification des côtés d'un carré.— a_2 - Un trou dans la sphère.— a_3 - Deux trous dans la sphère.— a_4 - n trous dans la sphère.— a_5 - Passerelle de un trou à deux trous.— a_6 - Incidence des trous sur les invariants.

4. Conclusion.

LA DESCRIPTION DE LA CAVERNE

Chapitre V

157

LA SUBVERSION DES INTERDITS : LE JEU ET LA TOPOLOGIE

Une merde

TROU TORIQUE

1. Invariants.

2. Le tore simple.— a_1 - Définition.— a_2 - Différentes présentations de l'étoffe torique. *Le tore présenté comme un anneau ; une n -sphères-à-tubes ; une 2-sphères à tubes ; une sphère à une anse.*— a_3 - Calcul de quelques invariants. Calcul de l'indicateur d'Euler-Poincaré ; Calcul du groupe fondamental.— a_4 - Le trou torique.— a_5 - Les trajets toriques, les nœuds toriques. *Calcul des lacets toriques sur le dessin. Un tour méridien et un tour longitude. Un tour méridien et zéro tour longitude. Un tour méridien et deux tours longitudes. Deux tours méridiens et un tour longitude. Deux tours méridiens et trois tours longitudes. Règle de tracé du trajet torique composé d'un seul lacet. Trois tours méridiens et deux tours longitudes. Trois tours méridiens et quatre tours longitudes. Quatre tours méridiens et trois tours longitudes. Quatre tours méridiens et cinq tours longitudes. Deux tours méridiens et deux tours longitudes. Quatre tours méridiens et deux tours longitudes.*

3. Les multi-tores.— a₁ - Définition.— a₂ - Présentation des multi-tores. *Présentations comme une composition d'anneaux ; une sphère à anses ; une 2-sphère à tubes ; une multi-sphère à tubes ; une 2-sphère à tubes avec des anses. Les multi-tores pairs ; Les multi-tores impairs.*— a₃ - Les trajets multi-toriques. *Un lacet sur le simple tore. Un lacet sur le double tore. Un lacet sur le triple tore. Deux lacets sur le simple tore. Deux lacets sur le double tore. Deux lacets sur le triple tore. Trois lacets sur le double tore. Trois lacets sur le triple tore.*— a₄ - Complémentarité entre les trajets multi-toriques et les graphes multi-toriques.— a₅ - Parité de la coupure supplémentaire à ajouter à des trajets multi-toriques pour disjoindre l'étoffe en deux parties symétriques. *Un rond posé sur le 4-tore. Deux ronds posés sur le 4-tore. Un rond posé sur le 5-tore. Deux ronds posés sur le 5-tore. La relation entre genre, ronds et coupure.*— a₆ - Le nouage d'étoffes multi-toriques.

4. Conclusion.

Chapitre VI

LA GRANDE TAILLE DES TORES troués, coupés

199

TROU TORIQUE
TROU IMAGINABLE
FACES

1. Invariants.

2. Le tore troué.— a₁ - Présentation du tore troué.— a₂ - Monstrations du retournement du tore. *1 - Un tore percé d'un trou imaginable. 2 - A partir de deux anneaux enlacés. 3 - Un tore fait armature dans un autre tore qui l'enveloppe, percé d'un trou.*— a₃ - Echange des tours méridiens et longitudes dans le retournement du tore.

3. Le tore coupé.— a₁ - Coupures selon les trajets toriques. *Coupure d'une sphère à anse selon un méridien. Coupure d'une sphère à anse selon un longitude. Coupure d'une sphère à anse selon un trajet composé d'un longitude et d'un méridien. Trajet qui enserre les deux pieds d'une anse. Coupure réductible sur une anse d'une sphère à anse. Coupure d'un double tore selon un trajet médian. Le double tore coupé selon un de ses méridiens. Le double tore coupé selon un de ses longitudes. Un trajet méridien composé avec un trajet longitude dans le double tore. Coupure d'une sphère à trois anses selon un trajet qui passe sous une anse et entre les deux autres. Coupure d'un triple tore selon un trajet qui emprunte une anse et tourne autour du pied des deux autres. Coupure du tore selon l'enlacement plongé dans son étoffe. Coupure du tore selon le nœud trèfle plongé dans son étoffe. Coupure d'une sphère à anses selon un méridien sur une anse et un trajet qui entoure un pied de celle-ci et les deux pieds de l'autre anse. Une sphère à anses découpée par le nœud de Whitehead. Le triple tore découpé par une chaîne triviale. Coupure du triple tore selon le nœud borroméen.*— a₂ - Découpe selon un graphe.

4. Conclusion.

Chapitre VII

L'INVOLUTION SIGNIFIANTE, ET L'a, JEU RELATIF DES COUPURES

Le regard

233

TROU MœBIEN
FACES

1. Invariants.

2. **L'involution signifiante.**— a_1 - La présentation par *L'Etourdit.*—
 a_2 - *Les Petits Chevaux de Tarquinia.*

3. **La bande de Mœbius.**— a_1 - Construction de la bande de Mœbius.
1 - Annulation d'un composant de bord d'une bande bipartie. 2 - La bande de Mœbius produite par identification du carré.— a_2 - La bande de Mœbius et ses coupures. *1 - Les deux types de coupures. 2 - Renversement à la surface du plan projectif et relation entre les deux types de coupures.*— a_3 - Définition de la bande de Mœbius comme surface d'empan du huit intérieur.— a_4 - La bande de Mœbius et ses coupures à partir de l'enlacement. *1 - La coupure à un seul tour. 2 - La coupure à double tour.*— a_5 - Les autres Mœbius extrinsèques.

4. Les masques.

Chapitre VIII

LA PERSPECTIVE TORDUE

Le regard et la voix

253

TROU MœBIEN
TROU IMAGINABLE
FACES
DEMI-TORSIONS

1. Invariants.

2. **Les carrefours de bandes avec demi-torsions.**— a_1 - Le carrefour de bandes portant, chacune, une demi-torsion.— a_2 - Le carrefour dont une seule bande est pliée.— a_3 - Fermeture du trou sphérique du carrefour de bandes tordues.

3. **La bande de Mœbius trouée.**— a_1 - Le trou mœbien.—
 a_2 - Monstration de l'équivalence des deux trous.— a_3 - Trou et zone mœbienne.
Le trou est dans la zone mœbienne ; Le trou est contre la zone mœbienne.—
 a_4 - Correspondance entre les deux constructions de la bande de Mœbius.

4. **Revenons à nos demi-torsions.**— a_1 - Construction des étoffes quelconques. *1 - Les multi-carrefours. 2 - Une bretelle ajoutée à un schéma de Griffiths.*— a_2 - Montage d'une bretelle sur une étoffe quelconque. *1 - Bretelle ou pont. 2 - Dans le cas des bretelles strictes. 3 - Dans le cas des ponts. a - Dans le cas d'une étoffe bilatère. Le pont effectivement non-tordu. Le pont effectivement tordu. a' - Dans une étoffe unilatère. Le pont sans demi-torsion apparente. Le pont avec demi-torsion apparente.*

5. Démontage des étoffes selon leurs bretelles.

343

LA TOPOLOGIE DE SURFACE DES SHÉMAS DE LACAN

Conclusion

277

LE MI-DIT SOLIDAIRE DE L'ÉTOFFE

Fermeture des schémas à la surface du plan projectif

TROU IMAGINABLE

1. Le schéma R refermé selon la surface du plan projectif troué.— a - La figure à la fente transverse.— a' - La figure non immédiate.
1 - Première figure médiane. 2 - Deuxième figure médiane.— a'' - La figure transverse.

2. Le schéma L refermé selon la surface du plan projectif troué.— a - La rétraction.

3. Le schéma I produit de la surface du plan projectif troué.— a' - La caricature : le passage du schéma R au schéma I.

LA REPRÉSENTATION DANS LA TOPOLOGIE

Appendice

Éléments pour une théorie de la représentation et de l'objet

Chapitre I

303

L'ABSENCE ET LE PUIT

Topologies à la surface du plan projectif

1. Topologie des trajets soumis à des déformations continues à la surface du plan projectif réel.— a - Objets.— a' - Transformations. *En partant d'un point hors ligne. La ligne sans points.*

2. Topologie des coloriations des faces de l'étoffe ayant une structure de plan projectif réel.— a - Objets.— a' - Transformations.

Chapitre II

315

LA CONSTRUCTION INTELLIGIBLE

De la présentation immergée des étoffes non orientables

1. Construction du modèle immergé du plan projectif.

2. Relation du modèle immergé et du modèle troué plongé de la bouteille de Klein.

Chapitre III	323
LA PSYCHANALYSE PARÉE DU PRESTIGE DU N'ESPACE	
Les schémas de Lacan à la surface du cross-cap	

1. Le schéma R et le schéma L de Lacan à la surface du plan projectif immergé.

2. En hautes dimensions.

Index des termes	329
-------------------------	------------

Bibliographies

Œuvres de Freud et écrits de Lacan accompagnés de quelques séminaires	333
--	------------

Bibliographie relative à la théorie des surfaces topologiques intrinsèques	335
---	------------

Bibliographie relative à la théorie de la dimension	335
--	------------

Bibliographie générale	336
-------------------------------	------------

Table des matières	339
---------------------------	------------

Achévé d'imprimer le 4 novembre 1988
sur les presses de la Nouvelle imprimerie Duculot à Gembloux (Belgique).

TEE

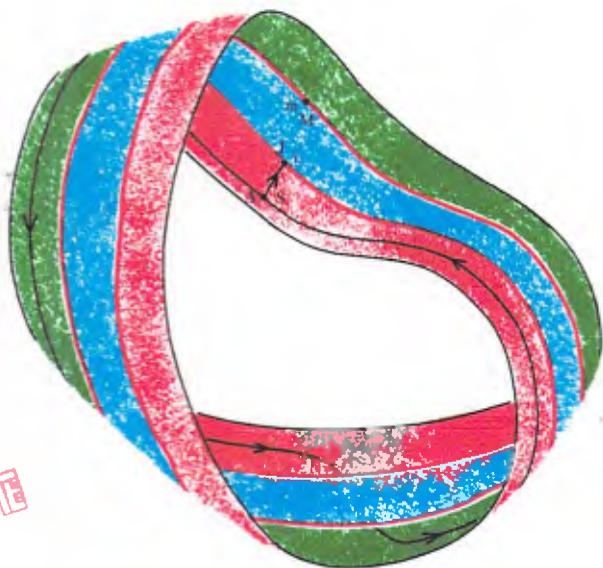
JEAN-MICHEL VAPPAREAU

ÉTOFFE

Ce manuel — n° 2 de la série des fascicules de résultats de topologie en extension — présente les surfaces topologiques intrinsèques en près de 1000 dessins commentés. Ainsi quiconque pourra, en suivant ces pages, muni de papier et de crayons, quelque soit son talent et ses connaissances mathématiques, se donner à sa manière une pratique dessinée de la topologie ; et apprendre les principes élémentaires de ce qui constitue la matière du second chapitre de l'enseignement topologique de Lacan (de 1961 à 1971).

C'est aux praticiens de quelque discipline que ce soit de s'apercevoir que la topologie du sujet, qui résulte de la psychanalyse, reste la seule chose qu'ils aient à en retenir dans leur domaine propre.

Une telle pratique, si elle n'est pas réservée au lecteur des *Ecrits*, est de rigueur pour qui souhaite suivre Lacan dans sa lecture de Freud et sa pratique de traduction entre concepts analytiques et objets topologiques. Après trente ans d'un usage des schémas de Lacan à la manière des tests où l'on doit projeter sa propre fantaisie, ses lecteurs peuvent enfin trouver ici une autre pratique de ces éléments de topologie plus proche du texte et apprendre à lire et à écrire, dans la structure, les constructions de Freud et de Lacan.



n° 2



ISBN 2-9503050-0-8
PRIX : 240 FF